ЗАДАЧИ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

1. Решить неравенство $x(8\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\leq 11\sqrt{1+x}-16\sqrt{1-x}$.

2. Доказать, что если в тетраэдре суммы противолежащих ребер равны, то суммы противолежащих двугранных углов равны.

3. Среди тетраэдров с данным объемом найти тетраэдр с максимальным радиусом вписанной в него сферы.

4. Доказать, что множество чисел вида $a+b\sqrt{2}$ всюду плотно на прямой, если a и b - целые (то есть, что для любого действительного числа в любой его окрестности найдется число такого вида).

5. В треугольнике ABC $\angle ABC=80°$, $\angle OAC=10°$, $\angle OCA=30°$, $BO:AC=k$ (O - произвольная точка). Найти $\angle ABO$.

6. В треугольнике ABC AB=BC, $\angle ABC=80°$, $\angle OAC=10°$, $\angle OCA=30°$ (O - произвольная точка). Найти $\angle ABO$.

7. Найти все такие функции $f(x)$, что для любых $x1$, $x2$ $|f(x1)-f(x2)|\leq(x1-x2)^2$.

8. Решить уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$.

9. (a_n) - арифметическая прогрессия.
Найти $\sum_{i=1}^{n-1} 1/(\cos(a(i))*\cos(a(i+1)))$.

10. В треугольнике ABC построить точку K на AB и точку M на BC так, что KA=KM=MC.

11. В тетраэдре OABC AB=BC=AC, $\angle OAB=\angle OBC=\angle OCA$. Доказать, что OABC - правильная пирамида.

12. Доказать, что в тетраэдре $R\geq 3r$.

13. Доказать, что в треугольнике $R\geq 2r$.

15. Доказать, что если все биссектрисы треугольника меньше 1, то его площадь меньше $1/\sqrt{3}$.

17. Решить уравнение
$(\sin(x)^7)+(\sin(y)^{(-3)})=(\cos(x)^7)+(\cos(y)^{(-3)})$.

18. Отсечь от данного угла треугольник данного периметра.

19. При каких a уравнение $4^n+2=a2^n\sin(an)$ имеет единственное действительное решение?

20. Решить уравнение $(1-\cos^2(x)/8)^n=2\sin^2(x)$, где $n=8$.

21. Опустить с помощью одной линейки перпендикуляр на диаметр данной окружности из данной точки, не лежащей на окружности и на диаметре.

22. Только циркулем разделить отрезок на k равных частей.

23. Может ли в сечении параллелепипеда получиться правильный пятиугольник?

24. Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике равны отрезки, на которые делит диагонали их точка пересечения, то равны стороны.

25. Построить квадрат по четырем точкам, принадлежащим его сторонам.

26. Построить ромб по двум параллельным прямым, содержащим две его стороны, и по двум точкам, принадлежащим двум другим его сторонам.

27. В окружности с центром O проведены радиус OA и хорда BC. BC перпендикулярна OA, $A=OA\cap BC$. Через точку A проведены хорды DF и EH. $M=EF\cap BC$, $N=DH\cap BC$. Доказать, что MA=AN (теорема о бабочке).

28. Дан угол ABC. Окружность касается стороны AB в точке K и BC в точке L. К окружности проведена касательная FH, где F на AB, H на CB, Y - точка касания. $M=FL\cap KH$. Доказать, что B, Y и M лежат на одной прямой.

29. Доказать, что в треугольнике $d^2=R^2-r^2$, где d - расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

30. Дано 2k прямых. Найти множество точек плоскости A таких, что

$$\sum_{i=1}^{k} p(A,l(i))=a,$$

где p - расстояние от точки до прямой.

31. Доказать, что если все грани тетраэдра равновелики, то они равны.

32. Пространственный четырехугольник касается шара. Доказать, что 4 точки касания лежат в одной плоскости.

33. Доказать, что если четырехугольник является вписанным и описанным, то его площадь равна корню из произведения длин его сторон.

34. Доказать, что $\prod_{i=1}^{n} p(i) < 4^{p(n)}$, где p(n) - n-ое простое число.

35. Построить дорожную сеть наименьшей длины такую, что из любой вершины можно доехать в любую вершину.

36. Плоскость разбита на три множества точек. Доказать, что найдутся две точки одного множества с расстоянием 1 между ними.

37. $\lim (a(n)-a(n-1))=0$. Верно ли, что существует $\lim a(n)$?

38. Доказать, что $\sin 10^\circ$ не является рациональным числом.

39. Построить отрезок $(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^n$, где n=4.

40. Найти $\sin 1^\circ$.

41. Решить уравнение $x^{x^n}=n$, где $n \in N$.

42. Доказать, что если все грани выпуклого многогранника - треугольники, то найдется ребро, к которому примыкают три острых угла.

43. Можно ли нарисовать на клетчатой бумаге правильный треугольник с вершинами в узлах?

44. Доказать, что два четырехугольника подобны, если равны четыре угла и угол между диагоналями.

45. Найти наибольшее значение функции $y=x^n+(1-x)^n$, где $n=1/4$.

46. Построить четырехугольник по четырем сторонам и средней линии.

47. В треугольнике ABC AB=BC, $K \in AB$, $M \in BC$, $AM \cap CK=E$, $BE \cap KM=P$. Доказать, что KP:PM=AK:MC.

48. Построить треугольник ABC, если известно AC, BO и BK, где O - центр описанной окружности, O лежит на BK, K лежит на AC.

49. Среди четырехугольников с данными сторонами найти четырехугольник с наибольшей площадью.

50. Существуют ли такие иррациональные числа x и n и рациональное число c, что $x^n=c$?

51. Для каждого p найти T(p) такое , что в наборе { T(p), T(p)+1, ..., T(p)+p-1 } наибольшее число простых чисел.

52. Сравнить $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

53. Найти значение выражения tg(П/7)*tg(2П/7)*tg(3П/7).

54. Можно ли представить сумму $(xy)^n+1$, где n=200, в виде произведения двух многочленов положительной степени?

55. |x|<0.05. Вычислить с точностью до 0.01 $\sqrt[n]{2-\sqrt{1-x}}$, n=3.

56. Избавиться от иррациональности в знаменателе
$1/(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c})$, n=3.

57. Доказать, что если в конечной системе выпуклых фигур на плоскости любые три имеют непустое пересечение, то пересечение всех этих фигур непусто.

58. Догонит ли гангстера полицейский, если его скорость в три раза меньше скорости гангстера, но он может как угодно двигаться внутри квадрата, а гангстер - только по периметру?

59. Доказать, что проекции AB и KM на прямую O1O2 равны. (Даны две окружности с центрами в O1 и O2. Точки A,B,L лежат на первой окружности, K, M, N - на второй. AN, LM - общие внешние касательные; BK - общая внутренняя.)

60. На дуге AB окружности с центром в O взята точка M. $\angle AOB=60°$. Доказать, что отрезки, соединяющие середины сторон четырехугольника AOBM, перпендикулярны.

61. В треугольнике ABC $\angle C$ - прямой. На AB построен квадрат с центром O. Выразить OC через длины катетов.

62. Найти предел последовательностей а) $x(1)=2$; $x(n)=1/\sqrt{x(n-1)}$;
б) $x(n)=\sin x(n-1)$;
в) $x(n)=\cos x(n-1)$.

63. Доказать, что в треугольнике с вершинами в основаниях высот данного треугольника высоты данного треугольника являются биссектрисами.

64. Сравнить $\log_9 10$ и $\log_{10} 11$.

65. В двух пересекающихся окружностях проведены общие касательные AB и CE. Доказать, что AC∥BE.

66. Сколько лучей можно провести а) в плоскости; б) в пространстве - так, чтобы углы между любыми двумя из них были одинаковы?

67. Обязательно ли, чтобы две окружности были гомотетичны а) в плоскости; б) в пространстве?

68. Решить систему $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=xy+yz+xz \\ 2x+3y-6z-1=0. \end{cases}$

69. Уравнения $x^2+p1x+q1=0$ и $x^2+p2x+q2=0$ не имеют действительных корней. Может ли иметь действительные корни уравнение $x^2+|p1+p2|x/2+|q1+q2|/2=0$?

70. Существуют ли две всюду определенные периодические функции, не имеющие общего периода, такие, что их сумма - периодическая функция?

71. Сравните $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (k радикалов) и 2.

72. Доказать, что следующие системы равносильны:
$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z>0 \\ xy+xz+yz>0 \\ xyz>0 \end{cases}$

73. Избавиться от иррациональности в знаменателе
$1/(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\ldots+\sqrt{z})$.

74. Построить отрезок с концами на сторонах данной трапеции, параллельный ее основаниям, который делится диагоналями на три равных отрезка.

75. Найти все всюду определенные функции $f(x)$ такие, что
$f(x)*f'(x)=0$.

76. Вписать квадрат а) в сектор; б) в сегмент.

77. Верно ли, что если $a+b>2$, то $a^n+b^n>2$, где $n=8$?

78. Дан треугольник ABC. Построить точки X на AB и Y на BC так, что а) AX=XY=YC; б) AX=XY=YB.

79. Найти ГМТ M таких, что S(MBC)=S(AMC) (где ABC - данный треугольник).

80. Даны точки A и B. Найти на данной окружности точку M так, что ∠AMB - максимальный.

81. В треугольнике ABC ∠C>120°. Точка внутри треугольника соединена с вершинами A, B и C отрезками x, y, z. Доказать, что $x+y+z \geqslant a+b$.

82. Решить уравнение $\cos(\cos(x))=\sin^2 x$.

83. Сравнить sin(8/7) и 8П/27.

84. В треугольнике ABC a>b. Сравнить соответствующие высоты, медианы, биссектрисы.

85. Исследовать на периодичность функцию $\sin(a^n)$.

86. Найти $\sum_{m=0}^{n} C(n, m)$, где C - биномиальный коэффициент.

87. Решить систему $\begin{cases} x^2y+1/y^n=x/y \\ x^n=1/(xy^2+1) \end{cases}$, где n=3.

88. Могут ли числа $\log_2 3$ и $\log_4 5$ быть корнями квадратного уравнения с целыми коэффициентами?

89. Найти (1-1/4)*(1-1/9)*...*(1-1/100).

90. Исследовать на периодичность функцию $\sin(\log_2 |x|)$.

91. Решить систему $\begin{cases} x!+y!=z! \\ x+y=z. \end{cases}$

92. O - точка пересечения трансверсалей AP, BM и CK в треугольнике ABC. Доказать, что (OM:MB)+(OP:PA)+(OK:KC)=1.

93. Построить треугольник, зная точки пересечения с описанной окружностью а) высот; б) биссектрис.

94. Сравнить $\sqrt[n]{2}$ и 1.01, где n=200.

95. Доказать, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению большей диагонали на меньшую.

96. В выпуклом четырехугольнике ABCK углы B, C, K тупые. Доказать, что AC>BK.

97. Три окружности одного радиуса пересекаются в одной точке. Доказать, что тогда другие точки пересечения лежат на окружности того же радиуса.

98. Решить уравнение $\sqrt{107+\sqrt{107+x}}=x$.

99. Конечно ли множество таких пар целых чисел (A,B), что числа A и B имеют одни и те же простые делители и числа (A-1) и (B-1) имеют одни и те же простые делители?

100. В окружность вписаны две окружности, касающиеся друг друга и диаметра 1-ой окружности и находящиеся с одной стороны от диаметра. 4-ая окружность касается всех трех окружностей, причем она лежит в той же полуплоскости относительно диаметра, касающегося 2-ой и 3-ей окружности, что и 2-ая и 3-я окружности. Известно, что расстояние от центра 4-ой окружности до диаметра равно d. Найти радиус 4-ой окружности.

101. Две стороны треугольника продолжены до бесконечности. Радиус вписанной в этот треугольник окружности равен c. Радиус вневписанной окружности, касающейся стороны треугольника, лежащей внутри описанного выше угла, равен r. Две окружности касаются описанной выше вневписанной окружности внешним образом, а также той стороны треугольника, которая касается описанной выше вневписанной окружности, и соответствующих продолжений сторон исходного треугольника. Радиусы этих окружностей равны соответственно b и c. Выразить r через a, b, c.

102. ABC - равносторонний треугольник. Внутри этого треугольника взята точка O, такая что $\angle AOB=a$, $\angle AOC=b$. Найти углы треугольника со сторонами AO, BO, CO.

103. В четырехугольнике ABCK O - точка пересечения диагоналей. Периметры треугольников AOB, BOC, COK, AOK равны. Доказать, что ABCK - ромб.

104. Четырехугольник ABCM вписан в окружность с центром в точке O. K - точка пересечения диагоналей. P принадлежит CM, E принадлежит AB, K принадлежит EP, EP перпендикулярна OK. Доказать, что **EK=PK.**

105. Дано k попарно пересекающихся прямых. Найти ГМ точек, сумма расстояний от которых до данных прямых постоянна.

106. Четыре деревни лежат в вершинах квадрата. Проложить прямые дороги так, чтобы из каждой деревни можно было проехать в каждую и сумма длин дорог была бы минимальна.

107. Можно ли расположить 6 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя из них было бы целым и никакие три не лежали на одной прямой?

108. Решить неравенство

$$2^{\sin(x)} + 2^{\cos(x)} \geqslant 2^{1-\sqrt{1/2}}.$$

109. Даны два параллельных отрезка. С помощью одной линейки разделить один из них на k равных частей.

110. На плоскости даны треугольник ABC, точка E на BC и точка P. Построить M на AB так, чтобы KM = ME, где K - точка пересечения MP и BC.

111. Для каждого n найти натуральное B(n) так, чтобы среди чисел B(n), B(n)+1, ..., B(n)+n-1 было наибольшее число простых.

112. Доказать, что отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника, делится пополам его описанной окружностью.

113. В треугольнике ABC проведены отрезки AK и BM, соединяющие две вершины с некоторыми точками противоположных сторон. Известно, что отношения углов KMC:BMA и MKC:AKB равны. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

114. Найти a, при котором уравнение $1 + \sin^2(x) = \cos(a*x)$ имеет единственное решение.

115. Сколько существует плоскостей, равноудаленных от четырех данных точек в пространстве?

116. Решить неравенство <пропущено в оригинале>.

117. Решить в целых числах уравнение

$$x*(x+1)*(x+2)*...*(x+7) = y^n, \quad n=4.$$

118. Доказать, что биссектриса треугольника лежит между высотой и медианой, проведенными из той же вершины.

119. Доказать, что если 1/(a+b+c) = 1/a+1/b+1/c, то аналогичное равенство, в котором a, b, c заменены на их (2n+1)-ые степени, также верно.

120. Найти сумму всех трехзначных чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 3.

121. Вычислить $x+2*x^2+...+n*x^n$.

122. Каждое из двух чисел есть сумма квадратов двух натуральных чисел. Доказать, что их произведение также обладает этим свойством.

123. Найти все a, при которых все решения системы

$$\begin{cases} 3\char94 y = a*3\char94 (x*(x+1)), \\ tg|x| = tg(y) \end{cases}$$

удовлетворяют условию y > 0.

124. Вычислить а) $\lg(tg1^\circ)+\lg(tg2^\circ)+...+\lg(tg89^\circ)$;
б) $\lg(tg1^\circ)*\lg(tg2^\circ)*...*\lg(tg89^\circ)$.

125. Сколько решений имеет уравнение а) x=tg(x); б) x=arcsin(x)?

126. Решить уравнение $\cos(\arcsin(\log_2(x+1/x)))=1$.

127. Доказать, что в тетраэдре отрезки, соединяющие вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины.

128. Всегда ли в сечении четырехгранного угла можно вписать параллелограмм?

129. Доказать, что если противоположные ребра тетраэдра попарн равны, то центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

130. Построить параллелограмм, вершины которого лежат на данных четырех скрещивающихся прямых.

131. Дан угол и две точки внутри него. Построить равнобедренный треугольник с вершинами на сторонах угла, чтобы его боковые стороны проходили через данные точки.

132. Тетраэдр содержится внутри сферы. На сколько частей разбивают сферу плоскости граней тетраэдра?

133. Найти наибольший член последовательности, n-ый член которой равен $\Pi^n/n!$.

134. Дан двугранный угол и прямая, пересекающая его грани. Провести через эту прямую плоскость, образующую с гранями равные углы.

135. Через данную точку провести прямую, отсекающую от данного угла треугольник данной площади.

Решить следующие уравнения:

136. $(\sin 10°)^n+(\cos 10°)^n=1$.

137. (cos x)*(cos 2x)=1/4.

138. (sin(x)^10)*(cos(x)^6)=7/8.

139. 5*(cos(x)^5)-3*(sin(x)^3)=5.

140. $2*(\cos n/16)=2^n+1/2^n$.

141. (tg(x)^4)-2(tg(x)^2)+2=(2/П)*arcsin(y).

142. $x^2+2x(\sin(xy))+1=0$.

143. √(1+2(sin(x)^4)+√(1+2(cos(x)^6)=2√3.

144. 4*(sin x)-(cos(x)^(-3))=4(cos x)-(sin(x)^(-3)).

145. (tg 2x)+1/(sin x)=(ctg x)+1/(sin 5x).

146. Решить неравенство $|(\sin x)*(\cos x)-3/4|\leqslant 1/4$.

147. Сколько решений имеет уравнение
lg((sin x)-0,6)+lg((cos x)-0,7)+1=0 ?

148. При каких a любой корень уравнения $(\sin x)+a(\cos 3x)=0$ является корнем уравнения $a(x^2-1)+x(\sin x)=0$?

149. Найти множество значений функции а) $4(\cos x)-3(\sin x)$;
б) $1/(\cos x)-1/(\sin x)$.

150. $a*(\cos^2 x)+b*(\sin^2 x)+c*(\sin x)*(\cos x)+d$. (?)

151. Найти минимальное значение выражения $(tg(x+2°))/(tg(x))$, если $x\in]0°,88°[$.

152. Найти максимум функции
$(\cos^2 x)-(3/2)*(\cos^2 x)*(\sin^2 x)-(\sin^n x)$, где $n=4$.

153. Выразить в радикалах а) $(\sin 18°)$; б) $(\sin 3°)$.

154. Решить уравнение $3^n+(\log_2 n)=10$.

155. Доказать: уравнение $(1/16)^n=(\log_{1/16} n)$. (?)

156. Вычислить без таблиц 2^n-3^n, где $n=\sqrt{(\log_3 2)}$

157. Решить уравнение $2*x^{(\lg 5)}+3*5^{(\lg x)}=5$.

158. Что больше – 413^n или $6+3^n$, где $n=1/3$?

159. Решить в натуральных числах уравнение $x^y=y^x$.

160. Доказать, что в выпуклый многоугольник площади 1 можно вписать треугольник площади не меньше 1/4.

161. Доказать, что в выпуклый многогранник объема 1 можно вписать тетраэдр объема не меньше 1/8. (?)

162. Существует ли бесконечное множество попарно неравных прямоугольных треугольников, длины сторон которых – натуральные числа, причем длины катетов отличаются на 1?

163. Функция $\Phi(x, y)$ принимает не менее трех значений. При некоторых a, b $\Phi(a, y)$ не постоянна и $\Phi(x, b)$ не постоянна. Доказать, что найдутся такие p, q, r и s, что $\Phi(p, q)$, $\Phi(r, q)$, $\Phi(p, s)$ – три различные значения функции.

164. Дан треугольник ABC. Провести прямую, делящую пополам его площадь и периметр.

165. $ab = 4$, $c^2+4*d^2=4$. Доказать, что $(a-c)^2+(b-d)^2\geq 1,6$.

166. Доказать неравенство $((\sin x)/x)^n\geq\cos(x)$, где $n=3$, $x\in]0; \Pi/2]$.

167. Доказать неравенство
$1/\sin^2 x \leq 1/x^2 + 1 - 4/\Pi^2$, $x\in]0; \Pi/2]$.

168. ABCDE – выпуклый пятиугольник, $S(ABC) = S(BCD) = S(CDE) = S(DEA) = S(EAB) = 1$. Найти $S(ABCDE)$.

169. Решить в рациональных числах уравнение: $(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2= 5+4\sqrt{2}$.

170. На ребрах тетраэдра объема 1 отмечено по одной точке, не совпадающей с вершинами. Рассматриваются 4 тетраэдра, одна из вершин каждого из которых – вершина данного тетраэдра, а остальные – отмеченные точки на ребрах, выходящих из этой вершины. Доказать, что среди этих тетраэдров найдется такой, объем которого не превосходит 1/8.

172. На основании АВ трапеции АВСЕ дана точка К. Построить на основании СЕ такую точку М, чтобы площадь четырехугольника, получающегося при пересечении треугольников АМВ и СЕК, была наибольшей.

173. Может ли фигура в пространстве иметь ровно 6 осей симметрии?

174. Что больше — $\sqrt[n]{60}$ или $2 + \sqrt[n]{7}$, где $n=3$?

175. Три окружности попарно пересекаются в двух точках. Доказать, что три прямые, проходящие через каждую пару точек, пересекаются в одной точке.

176. Через точку Х, лежащую в основании тетраэдра, проведены прямые, пересекающие боковые грани в точках А, В и С. Найти положение точки Х, при котором объем тетраэдра ХАВС максимален.

177. В выпуклом четырехугольнике АВСЕ АВ=СЕ. Через середины диагоналей проведена прямая (середины не совпадают). Доказать, что эта прямая образует с прямыми АВ и СЕ равные углы.

178. Вписать в треугольник прямоугольник с данной диагональю. Провести полное исследование.

179. Решить графически неравенство $2*x*y*\ln(x/y) < x^2 - y^2$.

180. Решить систему

$$\begin{cases} y*(x+y)^2 = 9, \\ y*(x^n-y^n) = 7, \end{cases} \quad \text{где } n=3.$$

181. Длины последовательных сторон выпуклого четырехугольника равны a, b, c и d. Доказать, что $S \leqslant (ac+bd)/2$.

182. Построить выпуклый четырехугольник по его углам и диагоналям. Провести полное исследование.

183. Доказать, что $x*\cos(x) < 0.71$, где $x \in]0; \Pi/2]$.

184. Решить в целых числах уравнение $x*(3y-5) = y^2+1$.

185. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты многочлена $x^n + ax^2 + bx + c$ ($n=3$), чтобы из отрезков, длины которых равны его корням, можно было составить треугольник?

186. Можно ли два произвольные квадрата разрезать на многоугольники, из которых можно сложить квадрат?

187. Построить треугольник АВС по радиусу описанного круга, хорде АМ этого круга и отрезку АО этой хорды, где О — центр вписанного круга.

188. Дана прямая СЕ и точки А и В, не лежащие на ней. Найти на прямой такую точку М , что угол АМС в 2 раза больше угла ВМЕ.

189. Периметр треугольника равен 2р. Рассматривается заключенный внутри треугольника отрезок касательной к вписанной окружности, параллельный ВС. Существует ли среди всех таких отрезков наибольший по длине?

190. Доказать, что в числе $(6+\sqrt{35})^{1979}$ первые 1000 знаков после запятой - нули. (Вариант: $(6+\sqrt{37})^{999}$.)

191. Даны три окружности попарно не равных радиусов. Доказать, что точки пересечения пар внешних касательных лежат на одной прямой.

192. Точка O лежит на основании треугольной пирамиды HABC. Доказать, что сумма углов образованных OH с ребрами MA, MB и MC, меньше суммы плоских углов при M и больше половины этой суммы.

193. Доказать, что для выпуклого четырехугольника со сторонами a, b, c, d площадь $S \le \sqrt{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}/4$.

194. Доказать, что площадь любого сечения тетраэдра меньше площади какой-нибудь его грани.

195. В тетраэдре ABCE EB перпендикулярно EC и основание перпендикуляра, опущенного из E на плоскость ABC , совпадает с ортоцентром этого треугольника. Доказать, что $(AB+BC+AC)^2 \le 6(AE^2+BE^2+CE^2)$. Для каких тетраэдров имеет место равенство?

196. Дано уравнение $x \cdot x-a=|x-b|$. Для всякого целого неотрицательного n найти множество M(n) пар (a; b), при которых это уравнение имеет ровно n решений. Изобразить это множество на координатной плоскости.

197. См. 196. Уравнение $\sqrt{1-x^2}+|x-a|=b$.

198. Внутри тетраэдра ABCK взята точка E. Доказать, что площадь полной поверхности ABCK больше площади полной поверхности ABCE.

199. В четырехугольной пирамиде ABCHE E - вершина. Углы AHE и ABC - тупые. Доказать, что угол AEC больше угла BEH.

200. Найти наибольшее значение функции

$$y=\sqrt{3-2x-x^2} - \sqrt{10-3x-x^2}.$$

201. Решить уравнение $x^2+x^2/(x+1)^2=1$.

202. Решить уравнение $\operatorname{ctg}(x)=\sin(x+\pi/4)$, $0 \le x \le \pi$.

203. Медианы AH, BE, CM треугольника ABC отображены симметрично относительно его биссектрис AK, BP, CT соответственно. Доказать, что прямые, содержащие полученные отрезки пересекаются в одной точке.

204. Какую наибольшую площадь может иметь квадрат, вписанный в треугольник с площадью S?

205. $D(f)=R$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(88)=\sqrt{2}$. Доказать, что найдутся действительные x и y и натуральное n такие, что $|x-y| \le 4$ и $(f(x+1) - f(x)) \cdot |f(y+2^n) - f(y)| > 0$.

206. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 взята произвольная точка. Доказать, что сумма расстояний от нее до вершин не превосходит $2/(2-\sqrt{3})$.

207. Сравнить $\sqrt[n]{51}$ и $2+\sqrt[n]{5}$, где $n=3$.

208. Всякий ли трехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении образовался правильный треугольник?

209. Функция f определена и непрерывна на $[0,1]$, причем $0 < A \leqslant f(x) \leqslant B$ на $[0,1]$. Доказать, что

$$A*B*\int_0^1 dx/f(x) \leqslant A + B - \int_0^1 f(x)\,dx.$$

210. Доказать неравенство

$$(3+3\hat{}(1/3))\hat{}(1/3) + (3-3\hat{}(1/3))\hat{}(1/3) < 2*3\hat{}(1/3).$$

211. Доказать, что если сумма двух чисел больше 2, то сумма их тринадцатых степеней больше 2.

212. Решить следующее уравнение:

$(\sin^n(x))*\cos(x/2) + (1/2)*\sin(x)*\sin(x/2)*(1+2*\cos(x/2)) =$
$= 1+6*\sin^2(x/2)$, где $n=3$.

213. См. N 172, но - наименьшей.

214. Дана окружность и точка A вне ее. Пользуясь только линейкой, провести касательную к окружности.

215. Дана окружность, ее центр и точка внутри нее. Провести через эту точку хорду данной длины.

216. Произведение k положительных чисел равно 1. Доказать, что их сумма больше или равна k.

217. В треугольной пирамиде боковые ребра 5, 5 и 5, а стороны основания - 3, 3 и 2. Найти сечение с наибольшим периметром.

218. Найти $\int (2t-1)e^{t^2-t}\,dt$.

219. В плоском n-угольнике проведено k диагоналей. Рассматриваются треугольники, образованные тройками этих диагоналей. Доказать, что число таких треугольников не превосходит $(2k)^{1.5}$.

220. Вычислить $\sum_{k=1}^{1000} 1/(k^n+6k^2+11k+6)$, $n=3$.

221. Доказать, что $\sin 10^\circ*\sin 50^\circ*\sin 70^\circ=1/8$.

222. Даны a0 и a1. $a_i=- a(i-1)/2 + a(i-2)/i$. Найдется ли такое c, что для любого N $\sum_{n=1}^{N} |a_n|<c$?

223. H1, H2, H3 и H4 - высоты треугольной пирамиды. O - точка внутри нее, h1, h2, h3, h4 - расстояния от O до плоскостей граней. Доказать, что $H1^n+H2^n+H3^n+H4^n>=1024*h1*h2*h3*h4$, $n=4$.

224. Решить уравнение $|6x-5|=4\sin(\Pi x/3)$.

225. Сравнить $tg55^\circ$ и 1.4.

226. Все ребра многогранника равны, и существует сфера, касающаяся всех его ребер. Существует ли для этого многогранника описанная сфера?

227. Внутри треугольной пирамиды дана точка O. Доказать, что существует ребро пирамиды, которое видно из этой точки под углом не более $\arccos(-1/3)$.

228. При каких a для любого b имеет хотя бы одно решение система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a+(b^2+1)^y = 2; \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases} \quad ?$$

229. Построить правильный треугольник, вершины которого лежат на трех данных концентрических окружностях.

230. В данный угол вписана окружность с центром O. Проводятся касательные к окружности, пересекающие стороны угла, и рассматриваются треугольники с вершинами в точках пересечения и в точке O. Найти ГМ центров окружностей, описанных около этих треугольников.

231. Даны числа $1, 2, 4, \ldots, 2^n$. Указать наименьшее количество n вершин, для которого существует n-вершинник, среди длин ребер которого встречаются все данные числа.

232. Дана прямая и точка O вне ее. 5 точек прямой соединены отрезками с O. Можно ли с помощью параллельных переносов составить из этих отрезков пятиугольник?

233. При каких n $n! \vdots 2^n$?

234. Доказать, что сумма синусов углов выпуклого шестиугольника не превосходит $3\sqrt{3}$.

235. На сколько частей разбивают сферу n плоскостей, проходящих через ее центр, никакие три из которых не имеют общей прямой?

236. В треугольник вписана окружность. В три лунки, остающиеся от треугольника, вписаны три окружности, радиусы которых известны. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

237. В треугольнике ABC $AB=BC$, $K \in AB$, $M \in BC$, $\{E\}=(AM)\cap(CK)$, $P=(BE)\cap(KM)$. Доказать, что $KP:PM=AK:MC$.