Задачи на построение алгоритмов.

А. Робот

1. Дано: Робот в огороженном прямоугольнике.
Надо: Робот у северной стены.

2. Дано: Робот в огороженном прямоугольнике.
Надо: Робот в северо-западном углу.

3. Дано: Робот в нижней (южной) клетке огороженного коридора шириной в одну клетку.
Надо: Все клетки коридора закрашены.
(Инвариант цикла: клетка с роботом и все ниже закрашены.)

4. Дано: Робот в нижней (южной) клетке огороженного коридора шириной в одну клетку.
Надо: Все клетки коридора закрашены.
(Инвариант цикла: все клетки коридора ниже Робота закрашены.)

5. Дано: Робот в юго-западном углу огороженного прямоугольника.
Надо: Прямоугольник закрашен.

6. Дано: Робот в нижней клетке незакрашенного коридора шириной в одну клетку.
Надо: Клетки закрашены через одну, начиная с нижней.

7. Дано: Робот в левом нижнем углу огороженного проямоугольника.
Надо: Прямоугольник закрашен в шахматном порядке, левая нижняя клетка закрашена.
Указание. Высота или ширина прямоугольника (или обе) могут быть равны 1.

8. Дано: Робот у южной стены огороженного прямоугольника, внутри него только горизонтальные стены , все находящиеся на одной широте и не перегораживающие прямоугольник.
Надо: Робот у северной стены.

9. Дано: В огороженном прямоугольнике только горизонтальные стены, не нарушающие связности.
Надо: Робот у северной границы.

10. Дано: В огороженном прямоугольнике есть вертикальные и горизонтальные стены, не примыкающие к границам прямоугольника и друг к другу.
Надо: Робот у северной границы.

11. Дано: в огороженном прямоугольнике есть вертикальные и горизонтальные стены, не примыкающие друг к другу (но, возможно, примыкающие к границе) и не нарушающие связности.
Надо: Робот в северо-западном углу.

12. Дано: в огороженном прямоугольнике есть не примыкающая к границе, огороженная со всех сторон клетка: других стен нет, Робот в юго-западном углу.
Надо: Робот в клетке, соседней с огороженной.

13. Дано: Робот находится в n-ной клетке бесконечного в одну сторону коридора.
Надо: Робот находится в 2n-ной клетке.

14. Дано: Робот находится в коридоре шириной в 1 клетку.
Надо: Робот находится в клетке, симметричной исходной.

15. Дано: на бесконечном поле есть одна горизонтальная стена неизвестной ширины. Робот стоит у нее снизу.
Надо: Робот оказался на 1 клетку севернее исходного положения (обойдя стену).

16. Для каких свойств P возможно построить команду К с таким свойством: исполнение К в коридоре длиной n и шириной 1 с начальным состоянием внизу коридора заканчивается тогда и только тогда, когда P(n) истинно?

Б. Задачи для программирования на паскале.

Переменные, присваивания, цикл, выбор.

1. Дано целое число a и натуральное (целое неотрицательное) число n. Вычислить a в степени n.

2. Даны натуральные числа a, b. Получить их произведение a*b, используя в программе лишь операции +, —, =, <>.

3. Даны натуральные числа a, b. Вычислить их сумму a + b. Использовать только операторы присваивания вида <переменная1> := <переменная2>, <переменная> := число и <переменная1> := <переменная2> + 1.

4. Даны натуральное число a и целое положительное число d. Вычислить частное q и остаток r при делении a на d, не используя операции div и mod и вещественных чисел.

5. Дано натуральное n, вычислить n! (0! = 1, n! = n * (n—1)!).

6. Последовательность Фибоначчи определяется так: a (0) = a(1) = 1, a (k) = a (k—1) + a (k—2) при k >= 2. Дано n, вычислить a (n).

7. (а) Дано натуральное n, вычислить 1/0! + 1/1! +...+ 1/n!. (б) То же, если требуется, чтобы количество операций (выполняемых команд присваивания и вычисления выражений) было бы не более Cn для некоторой константы C.

8. Даны два натуральных числа a, b, не равные 0 одновременно. Вычислить НОД (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b.

9. Составить программу, печатающую разложение на простые множители заданного натурального числа n (Другими словами, требуется печатать только простые числа и произведение напечатанных чисел должно быть равно n: если n = 1, печатать ничего не надо).

10. Даны натуральные a и b, не равные 0 одновременно. Найти d = НОД (a, b) и такие целые x и y, что d = a * x + b * y.

11. Составить программу, печатающую квадраты всех натуральных чисел от 0 до заданного натурального n.

12. Та же задача, но требуется использовать из арифметических операций лишь сложение и вычитание, причем общее число операций не должно превосходить Cn для некоторой константы C.

13. Проверить, является ли заданное натуральное число n > 1 простым.

14. Дано целое гауссово число n + mi (n, m — целые). (а) Проверить, является ли оно простым в кольце целых гауссовых чисел. (б) Напечатать его разложение на простые (в этом кольце) множители.

15. Разрешим использовать команды write (i) лишь при i = 0, 1, 2,..., 9. Составить программу, печатающую десятичную запись заданного натурального числа n > 0. (n = 0 являлось бы некоторым исключением, так как обычно не печатаются нули в начале числа).

16. Та же задача, но надо напечатать десятичную запись в обратном порядке (для n = 173, например, надо печатать 371).

17. Дано натуральное n. Подсчитать количество решений неравенства x * x + y * y < n в натуральных числах, не используя действий с вещественными числами.

18. Та же задача, но количество действий должно быть ограничено C * (n в степени 1/2).

19. Даны ~~натуральные~~ целые числа a и b, причем a>=0, b > 0. Найти частное и остаток при делении a на b, оперируя лишь с целыми числами и не используя операции div и mod, за исключением деления четных чисел на 2. Число операций не должно превосходить C1*log(a/b) + C2 для некоторых констант C1, C2.

Массивы.

В следующих задачах переменные x, y, z предполагаются описанными как array [1..n] of integer (n — некоторое натуральное число, большее 0), если иное не оговорено особо.

20. Заполнить массив x нулями. (Это означает, что нужно составить фрагмент программы, после выполнения которого все значения x [1],..., x[n] равны 0 независимо от начального значения переменной x.)

21. Подсчитать количество нулей в массиве x. (Составить фрагмент программы, не меняющий значения переменной x, после исполнения которого значение некоторой целой переменной k равнялось бы числу нулей среди компонент массива x.)

22. Не используя оператор присваивания для массивов, составить фрагмент программы, эквивалентный оператору x := y.

23. Найти максимум из x [1]... x [n].

почему массивы?

24. Пусть A — оператор, содержащий переменную i, при исполнении которого значение i не меняется, b и c — два целых числа. Составить оператор, исполнение которого было бы эквивалентно последовательному исполнению A при i = b, i = b + 1, ..., i = c. (При b = c оператор A должен исполняться 1 раз, при b > c — ни разу.)

25. Дан массив ~~x: array [1..n] of integer, причем~~ Известно, что x [1] <= ... <= x [n]. Найти количество различных чисел среди элементов ~~этого~~ массива x.

26. Коэффициенты многочлена хранятся в массиве a: array [0..n] of integer (n — натуральное число, степень многочлена). Вычислить значение многочлена в точке x (т.е. a [n] * (x в степени n) +...+ a [1] * x + a [0]). Количество действий не должно превосходить C*n для некоторой константы C

27. В массивах a: array [0..k] of integer и b: array [0..l] of integer хранятся коэффициенты двух многочленов степеней k и l. Поместить в массив c: array [0..m] of integer коэффициенты их произведения. (Числа k, l, m — натуральные, m = k + l; элемент массива c с индексом i содержит коэффициент при x в степени i.)

28. Даны два возрастающих массива x: array [1..k] of integer и y: array [1..l] of integer (т.е. x [1] <...< x [k], y [1] <...< y [l]). Найти количество общих элементов в этих массивах (т. е. количество тех целых t, для которых t = x [i] = y[j] для некоторых i и j). Количество действий не должно превосходить C*(k+l) для некоторой константы C.

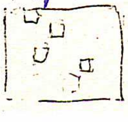
? 29. Решить предыдущую задачу, если известно лишь, что x [1] <= ... <= x [k] и y [1] <= ... <= y [l].

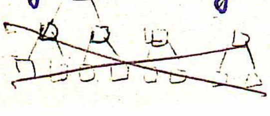
30. Даны два массива x [1] <=...<= x [k] и y [1] <= ... <= y [l]. "Соединить" их в массив z [1] <=...<= z [m] (m = k + l; каждый элемент должен входить в массив z столько раз, сколько он входит в массивы x и y в совокупности). Количество действий не должно превосходить C*(k+l) для нек-рого C

31. Некоторое число содержится в каждом из трех целочисленных массивов x [1] <=...<= x [p], y [1] <=...<= y [q], z [1] <=...<= z[r]. Напечатать это число. Количество действий ≤ C*(p+q+r)

32. Элементами массива a [1..n] являются неубывающие массивы [1..m] целых чисел (a: array [1..n] of array [1..m] of integer; a [1][1] <= a [1][2] <= ... <= a [1][m], ..., a [n][1] <= ... <= a [n][m]); известно, что существует число, входящее во все массивы a [i] (существует такое x, что для всякого i из 1..n существует j из 1..m, для которого a [i][j] = x). Найти одно из таких x. Количество действий должно быть не более C*n*m*m для некоторой к-ты C.

32. Та же задача, но к-во действий должно быть не более C*n*m





33. Дан массив x : array [1..n] of array [1..m] of integer, упорядоченный "по строкам" и "по столбцам":

x [i][j] <= x [i+1][j], x [i][j] <= x [i][j+1]

и число a. Требуется вычислить, встречается ли a среди x [i][j]. Количество действий $\le C * (m+n)$.

34. Вычислить 150!. (Напоминание: в системе TURBO—паскаль целые числа должны не превосходить (2 в степени 15) — 1.)

35. Дана последовательность x [1] <=...<= x [n] целых чисел и целое число a. Выяснить, содержится ли a в этой последовательности, то есть существует ли i из 1..n, для которого x [i] = a. (Количество операций не более C * log n).

36. Указать индуктивные расширения для следующих функций:

а) среднее арифметическое последовательности вещественных чисел;
б) число элементов последовательности целых чисел, равных ее максимальному элементу;
в) второй по величине элемент последовательности целых чисел (тот, который будет вторым, если переставить члены в неубывающем порядке);
г) максимальное число идущих подряд одинаковых элементов;
д) максимальная длина монотонного (неубывающего или невозрастающего) участка из идущих подряд элементов в последовательности целых чисел;
е) число групп единиц, разделенных нулями (в последовательности нулей и единиц).

37. Даны две последовательности x [1]...x[n] и y [1]...y[k] целых чисел. Выяснить, является ли вторая последовательность подпоследовательностью первой, т.е. можно ли из первой вычеркнуть некоторые члены так, чтобы осталась вторая. Число действий не должно превосходить C * (n + k).

38. Даны две последовательности x [1]...x[n] и y [1]..y[n] целых чисел. Найти максимальную последовательности, являющейся подпоследовательностью обеих последовательностей. Количество операций не более C*n*k.

39. Дана последовательность целых чисел x [1]...x[n]. Найти максимальную длину ее возрастающей подпоследовательности (количество операций не более C * n * log n).

40. Дан массив x [1]...x[n] целых чисел. Переставить элементы массива в неубывающем порядке (а) сделав не более C*n*n операций; (б) сделав не более C*n*log n операций; (в) сделав не более C*n*log n операций и используя лишь дополнительную память ограниченного объема (не используя других массивов).