Кондратьев Володя

ГРУППЫ 2

СЛ 2
29.09
1988г

СТРОЕНИЕ ГРУППЫ ПЕРЕСТАНОВОК. Произвольный элемент группы S можно записать либо в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \end{pmatrix}$, где a – элемент множества I={1,2,...,n}, в который g переводит i, либо в виде произведения циклов. ЦИКЛ $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ – это перестановка, которая переводит b_1 в b_2, b_2 в b_3, ..., b_k в b_1, а все остальные элементы множества I оставляет на месте. Число k называется ДЛИНОЙ цикла. Циклы длины 2 называются ТРАНСПОЗИЦИЯМИ.

1. а) Найдите произведение $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 10 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 10 & 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

б) Докажите, что циклы $g=(a_1, a_2, \dots, a_k)$ и $h=(b_1, b_2, \dots, b_l)$ коммутируют (т.е. gh=hg), если множества $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_l\}$ не пересекаются.

в) Докажите, что любая перестановка единственным (с точностью до порядка) образом представляется в виде произведения попарно непересекающихся циклов.

г) Найдите порядки перестановок из задачи 1а.

д) Найдите максимальный порядок элемента в S_{10}.

2. (ЧЕТНОСТЬ) Докажите, что а) любая перестановка – произведение транспозиций;

б) произведение нечетного числа транспозиций не может равняться единице;

в) следующее определение корректно: пусть $g=t_1 t_2 \dots t_k$ разложение перестановки в произведение транспозиций; перестановка g называется ЧЕТНОЙ, если k четно, и НЕЧЕТНОЙ, если k нечетно (какими будут перестановки из 1а ?);

г) произведение двух четных или двух нечетных перестановок четно, а четной и нечетной – нечетно (тем самым четные перестановки образуют группу);

д) четность перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{pmatrix}$ равна четности числа беспорядков в ней (БЕСПОРЯДОК – это пара (i, j) тч $i<j$ и $a_i > a_j$);

е) любая четная перестановка является произведением циклов длины 3.

3. а) Собрание сочинений из 11 томов стоит на полке в обратном порядке. Можно ли поставить его в правильном порядке, переставляя много раз по паре соседних книг (не разнимая их) ? б) А 12-томное собрание сочинений ?

4. Можно ли в игре 15 из положения

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

получить правильное

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

?

5. Можно ли, поворачивая грани кубика Рубика а) циклически переставить четыре кубика в вершинах одной грани (возможно перевернув их); б) перевернуть один кубик в середине ребра; не затронув остальных кубиков?

6. Со словами, состоящими из букв Т и Ц, разрешается проделывать следующее: вставить или уничтожить в любом месте ТТ или ЦЦЦ, заменить ТЦЦ на ЦТ или ЦТ на ТЦЦ. Каково наибольшее число таких слов, не получающихся друг из друга ?

ПОДГРУППЫ. Подмножество H группы G называется ПОДГРУППОЙ, если (ПГ1) $e \in H$; (ПГ2) $\forall h \in H$ $h^{-1} \in H$; (ПГ3) $\forall h, g \in H$ $hg \in H$.

7. а) Не следует ли аксиома ПГ1 из ПГ2 и ПГ3 ? Докажите, что

б) если G конечна, а множество H непусто, то ПГ1 и ПГ2 следуют из ПГ3.

в) порядок элемента $g \in G$ равен порядку минимальной подгруппы, содержащей g (эта подгруппа называется ЦИКЛИЧЕСКОЙ подгруппой, порожденной элементом g)

8. Найдите все подгруппы группы а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}_n$; в) S_3; г) S_4.

9. Найдите все конечные подгруппы группы а) $\mathbb{C}^*$; б) движений плоскости; в) вращений пространства.

10. Докажите, что любая подгруппа H группы G= а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{T}$ либо порождена одним элементом (причем в случае $\mathbb{T}$ образующая – рациональное число), либо ВСЮДУ ПЛОТНА (т.е. на любом интервале]a,b[в G лежит точка из H).

11. Докажите, что существуют целые m и n тч $|m+n\sqrt{2}-\pi| < 0{,}000\,000\,1$.

12. (Теорема ЛАГРАНЖА) а) Порядок подгруппы H конечной группы G делит порядок G. <Указание: $\forall a, b \in G$ множества $aH:=\{ah : h \in H\}$ и bH содержат поровну элементов. Такие множества называются ПРАВЫМИ СМЕЖНЫМИ КЛАССАМИ G по H.>

б) Порядок конечной группы делится на порядок любого ее элемента.

1аб	в	г	д	2а	б	в	г	д	е	3аб	4	5аб	6	7аб	в	8а	б	в	г	9аб	в	10аб	11	12аб
11/4	20.11 →			3/12										3	декабря		→			31	3	7	3	10
В	Шенгам													Шень			→			Ю М	Ю М	Кугем	Ю М Пос 10.12	ТМ Пос 10.12