Кондратьев Володя

М О Щ Н О С Т И

СЛ 3
31.10
1988г

Проверить, что в конечных множествах А и В поровну элементов, можно, установив между ними взаимно-однозначное соответствие. Это оправдывает такое определение. Множества X и Y называются РАВНОМОЩНЫМИ, если между ними существует взаимно-однозначное соответствие.

1. Докажите, что если X и Y равномощны Z, то X и Y равномощны.

Множество, равномощное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$ называется СЧЕТНЫМ.

2. Докажите, что а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$; в) $\mathbb{Q}$ счетное множество.

3. Докажите, что а) подмножество счетного множества конечно или счетно; объединение б) двух; в) счетного числа счетных множеств счетно.

4. Пусть множество А бесконечно, В счетно, С конечно. Докажите, что а) в А есть подмножество равномощное В; б) $A \cup B$ и в) $A \setminus C$ равномощно А.

5. Докажите, что следующие множества счетны: а) рациональные точки в $\mathbb{R}^2$; б) конечные подмножества $\mathbb{N}$; в) периодические последовательности целых чисел; г) алгебраические числа (т.е. корни многочленов с целыми коэффициентами); д) многогранники в $\mathbb{R}^3$, все вершины которых имеют рациональные координаты.

6. Докажите, что множество конечно или счетно, если оно состоит из непересекающихся а) интервалов на прямой; б) кругов на плоскости; в) восьмерок (=две касающиеся окружности); г) букв Т (=пара $\perp$ отрезков) на плоскости.

Множества можно сравнивать по мощности. Говорят, что множество X НЕ МЕНЕЕ МОЩНО чем Y, если Y равномощно подмножеству X; и X БОЛЕЕ МОЩНО чем Y, если кроме того X и Y не равномощны. Таким образом, счетные множества наименее мощные из всех бесконечных (4а). Существуют и более мощные множества.

7. Докажите, что множество последовательностей из нулей и единиц несчетно <Указание: предположите противное и постройте посл-ть, не получившую номера>.

8. (Теорема КАНТОРА) Докажите, что множество всех подмножеств множества М более мощно, чем множество М.

Утверждение, что для любых множеств X и Y одно из них не мощнее другого, верно, но доказывается сложно. Более просто доказывается другое свойство.

9. (Теорема КАНТОРА-БЕРНШТЕЙНА) Докажите, что если X не менее мощно, чем Y, а Y не менее мощно, чем X, то X и Y равномощны.

10. Докажите, что следующие множества равномощны множеству задачи 7 (такие множества называются множествами мощности КОНТИНУУМ):
а) множество всех подмножеств $\mathbb{N}$; б) отрезок $[0;1]$; в) интервал $(0;1)$; г) $\mathbb{R}$; д) $(0;1) \cup (2;3)$; е) квадрат $[0;1]\times[0;1]$; ж) плоскость $\mathbb{R}^2$; з) $\mathbb{R}[x]$; и) посл-ти целых чисел; к) посл-ти действительных чисел.

Существование несчетного множества мощности меньшей континуума (гипотеза континуума) нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Тем не менее

11. Объединение двух множеств имеет мощность континуума. Докажите, что по крайней мере одно из них имеет мощность континуума.

1	2а	б	в	3а	б	в	4а	б	в	5а	б	в	г	д	6а	б	в	г	7	8	9	10а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	11
10.12																																
Пос																																