Кондратьев Володя

СЛ 6
6.11.89

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО - это множество M, на котором задано **расстояние**
(или **метрика**) - функция $d: M\times M \to R$ тч при всех $x,y,z\in M$

(МП1) $d(x,y)\geq 0$ и ($d(x,y)=0 \iff x=y$) (МП2) $d(x,y)=d(y,x)$;
(МП3) (**неравенство треугольника**) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

1. Проверьте, является ли метрическим пространством множество
а) жел.-дор. станций СССР с $d(x,y)$=минимальная стоимость проезда от x к y;
б) M с $d(x,y)=1$, если $x\neq y$, и 0, если $x=y$ (**дискретная метрика**);
в) n-буквенных слов с $d(X,Y)$=число позиций, в которых буквы в X и Y
различны (метрика **ХЕММИНГА**);
г) конечных подмножеств множества M, $d(X,Y)$=число элементов в $(X-Y)\cup(Y-X)$;
д) отрезков [a,b] в R с $d(X,Y)$= длина $(X-Y)\cup(Y-X)$ = дл.X + дл.Y - 2дл.$X\cap Y$;
е) **Q с p-адическим расстоянием** $d(x,y)=p^{-k}$, при $x\neq y$, где p - фиксированное
простое число, а k определяется из условия $x-y=p^k m/n$, m и n не кратны p;
ж) $R[[x]]$ с $d(f,g) = 2^{-n}$, где n - степень первого ненулевого члена в
разности рядов f и g <**x-адическая метрика**, например, $d(1+x, 1/1-x)=1/4$>;
з) R с $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$, где $f:R\to R$ - непрерывная функция;
и) R^n с метрикой $d_\infty(x,y)=\max\{|x_k-y_k|\}$; к) R^n с метрикой $d_1(x,y)=\Sigma|x_k-y_k|$;
л) R^n с метрикой $d_p(x,y) = (\Sigma|x_k-y_k|^p)^{1/p}$, $p>0$ <ук.: неравенство Юнга>;
м) $C^0[a,b]$={непрерывные на [a,b] функции} с $d_\infty(f,g) = \max|f(x)-g(x)|$;
н) $L_1[a,b]$={функции интегрируемые на [a,b]} с $d_1(f,g)= \int_a^b|f-g|$.

Пусть M - метрическое пространство, $c\in M$, $r\in R_+$. Множество $\{x\in M \mid d(x,c)\leq r\}$
называется (**замкнутым**) **шаром** радиуса r с центром в c.

2. а) Определите **открытый шар**, **сферу**, **отрезок**. б) Нарисуйте их в R^2 с
метриками d_1, d_∞, d_p. в) Докажите, что в пространствах 1е и 1ж все треуголь-
ники равнобедренные, а любые два шара либо не пересекаются, либо один со-
держится в другом. < Такие метрики называются **неархимедовыми**. Почему? >

3*(Код Хемминга). Докажите, что при $n=2^k-1$ (и только тогда) пространство
n-значных двоичных чисел с метрикой Хемминга можно разбить в объединение
непересекающихся единичных шаров. <Если наборами, соответствующими центрам
шаров закодировать некоторые сообщения, то, даже допустив при передаче
ошибку в одном знаке, мы сможем правильно восстановить сообщение.>

С помощью расстояния мы можем определить в любом метрическом пространстве
все топологические понятия из листков АН2,4,6: **предел** последовательности,
сходящиеся и фундаментальные последовательности, **предельные** точки, **открытые
и замкнутые множества**, **компактность**, **...** Большинство их свойств сохраняется
в общем случае. Но нужно все-таки проявлять осторожность.

4. Может ли замкнутый шар а) иметь несколько центров; б) лежать в шаре
меньшего радиуса; в) не быть замкнутым множеством; г) быть открытым мно-
жеством; д) не быть замыканием открытого шара; е) не быть компактом ?

5. а) Опишите сходящиеся последовательности в пространствах 1б,в,г,е,ж.
б) Докажите, что у метрик d_∞, d_1, d_p в R^n <1и,к,л> сходящимися являются одни
и те же последовательности. в) Верно ли это для d_∞ и d_1 в $C^0[a,b]$ <1м,н>?

6. Докажите, что множество X всюду плотно в пространстве M <т.е. $\bar{X}$ = M>,
если а) $X=\{x\in Q \mid 0<x<1\}$, M=Q с p-адической метрикой 1е; б) X=R[x], M=R[[x]];
в) $M=C^0[a,b]$ <1м>, X-кусочно-линейные непрерывные функции; г) $M=L_1[a,b]$,
X - кусочно-линейные непрерывные функции; д)* $M=C^0[a,b]$, X=R[x].

7. Докажите, что замкнутое и ограниченное множество в метрическом пр-ве
а) не обязательно компактно; б) в R^n (в любой из метрик 1и,к,л) компактно;
в)* в C^0 компактно тттк функции из этого множества **равностепенно непрерывны**
(т.е. $\forall c>0\ \exists d>0$ $|x-y|<d \Rightarrow |f(x)-f(y)|<c$ для всех f из этого множества)

Отображение $F:M\to N$ одного метрического пространства в другое называется
непрерывным, если $\forall c>0\ \exists d>0$ тч $d_M(x,y)<d \Rightarrow d_N(F(x),F(y))<c$.

8. Верно ли, что при непрерывном отображении а) сходящиеся последова-
тельности переходят в сходящиеся; б) фундаментальные - в фундаментальные;
в) прообраз открытого множества - открыт; г) образ компакта - компакт ?

9. Докажите, что непрерывная функция <т.е. непрерывное отображение в R>
на компактном пространстве а) достигает максимума; б) равномерно непрерывна.

1абвг 15п	дежзклмн	2а 25п	б в	3	4аб 25п	в г д е	5аб в	6аб в г д	7аб в	8аб в	г	9аб	