

Об обозначениях. Как обычно, e — элементарные симметрические многочлены ($e_\lambda = e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_k}$), h — полные симметрические многочлены ($h_\lambda = h_{\lambda_1} \dots h_{\lambda_k}$), s — многочлены Шура ($s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\rho}}{a_\rho} = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+j-1})}{\det(x_i^{j-1})}$).

Везде ниже (особенно в индексах суммирования) λ и μ — произвольные разбиения (ака диаграммы Юнга), α и β — произвольные мультииндексы, σ — произвольная перестановка; вряд ли кого-то смутят обозначения $x^\alpha = \prod x_i^{\alpha_i}$ или то, что количество переменных нигде не указывается.

1. Числа Костки

Хотелось бы связать многочлены Шура с другими, более понятными базисами. Первый шаг в этом направлении уже был сделан на прошлой лекции. А именно, было доказано, что $s_{(k)} = h_k$ и $s_{(1^k)} = e_k$ — и это утверждение получалось применением *формулы Пьери*,

$$h_k s_\lambda = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} s_\mu; \quad e_k s_\lambda = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1^k} s_\mu;$$

к $\lambda = \emptyset$.

Применив же формулу Пьери несколько раз, можно выразить через многочлены Шура произвольные полные симметрические многочлены:

$$h_\mu = \sum K_{\lambda\mu} s_\lambda; \quad e_\mu = \sum K_{\lambda\mu} s_{\lambda^*},$$

где $K_{\lambda\mu}$ есть число вхождений диаграммы λ в мультимножество диаграмм $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_k$. Другими словами, $K_{\lambda\mu}$ есть число способов получить диаграмму λ за k шагов, прибавляя на i -м шаге μ_i клеток, никакие две из которых не лежат в одном столбце.

Если писать в каждой клетке диаграммы номер шага, на котором она добавилась, станет видно, что $K_{\lambda\mu}$ — это количество *полустандартных таблиц* формы λ и веса μ (заполнений клеток таблицы λ числами, нестрого возрастающих по строкам и строго возрастающих по столбцам, среди которых μ_i чисел, равных i). Коэффициенты $K_{\lambda\mu}$ называются *числами Костки*.

(Любители доказательств по индукции могут переговорить это в виде доказательства по индукции. Доказательство второй формулы аналогично, но так как в соответствующей формуле Пьери меняются местами роли строк и столбцов, вместо диаграммы λ будет стоять транспонированная диаграмм λ^* .)

Отметим, что из комбинаторного описания не очевидно, что числа Костки зависят только от *разбиения* μ (т. е. не зависят от порядка весов μ_i) — зато это очевидно из их алгебраического смысла: умножение-то коммутативно.

Инволюция меняет местами h_μ и e_μ , поэтому естественно возникает гипотеза:

$$\omega(s_\lambda) \stackrel{?}{=} s_{\lambda^*}.$$

Те, кто решат домашнее задание, ее докажут.

2. Три вычисления произведения Коши

В этом разделе мы вычислим тремя способами произведение $\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1}$.

2.1. Определитель Коши. Посмотрим на *определитель Коши* $\det((1 - x_i y_j)^{-1})$.

С одной стороны, можно записать, что $(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_n x_i^n y_j^n$ и раскрыть определитель по определению:

$$\det((1 - x_i y_j)^{-1}) = \sum_{a_{ij}} \sum_{\sigma} \prod_i x_i^{a_{i\sigma(i)}} y_{\sigma(i)}^{a_{i\sigma(i)}};$$

собирая вместе коэффициенты при мономах вида x^λ , получаем

$$\sum_{\lambda} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} x^{\sigma_1(\lambda)} y^{\sigma_2(\lambda)} (-1)^{|\sigma_1 \sigma_2^{-1}|} = \sum_{\lambda} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} (-1)^{|\sigma_1|} x^{\sigma_1(\lambda)} (-1)^{|\sigma_2|} y^{\sigma_2(\lambda)} = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(x) a_{\lambda}(y).$$

С другой стороны, в духе вычисления определителя Вандермонда можно получить, что этот определитель равен

$$\frac{\prod(x_i - x_j) \prod(y - y_j)}{\prod(1 - x_i y_j)}.$$

Действительно, если домножить наш определитель на $\prod(1 - x_i y_j)$, получится *многочлен*, кососимметричный по x и по y — значит, он делится на произведение Вандермондов $\prod(x_i - x_j) \prod(y - y_j)$, причем из соображений степени отношение равно константе; доказательство того, что эта константа равна единице — упражнение.

Приравнявая результаты этих двух вычислений, получаем первую формулу для *произведения Коши*:

$$\prod(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y).$$

2.2. Производящая функция $H(x)$. Как обсуждалось на прошлой лекции,

$$\sum h_n(x) t^n = \prod(1 - x_i t)^{-1}.$$

Поэтому

$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \prod_j H_x(y_j) = \prod_j \sum_n h_n(x) y_j^n = \sum_{\alpha} h_{\alpha}(x) y^{\alpha} = \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} h_{\lambda}(x) \sigma(y_j^{\alpha}).$$

то есть

$$\prod(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum h_{\lambda}(x) m_{\lambda}(y).$$

2.3. Формула Якоби–Труди. Последний способ до какой-то степени смешивает предыдущие два. Домножим произведение Коши на определитель Вандермонда — но только по y , — а потом воспользуемся предыдущей формулой:

$$\begin{aligned} a_{\delta}(y) \prod(1 - x_i y_j)^{-1} &= a_{\delta}(y) \sum h_{\lambda}(x) m_{\lambda}(y) = \\ &= \sum_{\alpha; \sigma_1, \sigma_2} (-1)^{|\sigma_1|} y^{\sigma_1(\delta)} h_{\alpha}(x) y^{\sigma_2(\alpha)} = \sum_{\alpha; \sigma_1, \sigma_2} (-1)^{|\sigma_1|} h_{\alpha}(x) y^{\sigma_1(\delta) + \sigma_2(\alpha)}; \end{aligned}$$

переходя от α к $\beta = \sigma_2^{-1}\sigma_1(\rho) + \alpha$, получаем

$$\sum_{\beta; \sigma_1, \sigma_2} (-1)^{|\sigma_2^{-1}\sigma_1|} h_{\beta - \sigma_2^{-1}\sigma_1(\delta)}(x) \cdot (-1)^{|\sigma_2|} \sigma_2(y^\beta) = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} h_{\lambda - \sigma(\rho)}(x) \right) a_{\lambda}(y).$$

Таким образом,

$$\prod (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum \det(h_{\lambda_i + j - i}(x)) s_{\lambda}(y).$$

Сравнивая это выражение с первой формулой для произведения Коши, получаем формулу Якоби–Трудн,

$$s_{\lambda} = \det(h_{\lambda_i + j - i}).$$

В частности, для $\lambda = (1^k)$ это дает известную формулу $e_k = \det(h_{j-i+1})$, а после применения инволюции получаем парную к ней формулу $h_k = \det(h_{j-i+1})$.

В домашних задачах предлагается еще вывести (эту или) двойственную формулу, $s_{\lambda^*} = \det(e_{\lambda_i - i + j})$, из формулы Пьери. Еще одно, комбинаторное доказательство будет, вероятно, рассказано на одной из следующих лекций.

3. Скалярное произведение и числа Костки еще раз

3.1. Произведение Коши и скалярное произведение. Один из способов думать про формулы для произведения Коши типа тех, что мы видели в прошлом разделе (еще одна формула такого типа есть, кстати, в домашних задачах), следующий. Определим на кольце симметрических функций скалярное произведение условием $\langle h_{\lambda}, m_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda\mu}$, т. е. тем условием, что m — двойственный к h базис (не путать с инволюцией, которая переводит h , наоборот, в e).

Пусть u_{λ} и v_{μ} — два (аддитивных) базиса в симметрических функциях. Тогда $\langle u_{\lambda}, v_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ тогда и только тогда, когда $\prod (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} u_{\lambda}(x) v_{\lambda}(y)$.

Таким образом, многочлены Шура — это ортонормальный базис в кольце симметрических функций.

3.2. Комбинаторное определение многочленов Шура. Посмотрим еще раз на формулу $h_{\mu} = \sum K_{\lambda\mu} s_{\lambda}$. Она говорит, что матрица перехода от базиса s_{λ} к базису h_{μ} — это такая матрица из чисел Костки (строки и столбцы этой матрицы занумерованы диаграммами Юнга): $h = Ks$.

Применяя к этому равенству двойственность, получаем, что $s = K^*m$:

$$s_{\lambda} = \sum_{\mu} K_{\lambda\mu} m_{\mu}$$

(отметим, что, в отличие от предыдущей формулы, суммирование идет уже не по λ , а по μ). Другими словами,

$$s_{\lambda} = \sum_{\text{shape}(T)=\lambda} x^T$$

(суммирование ведется по всем полустандартным таблицам формы λ ; x^T соответствующий этой таблице моном — x_i там стоит в такой степени, сколько в таблице стоит чисел i).

Это описание можно считать еще одним, чисто комбинаторным определением многочленов Шура. Его применения к комбинаторике мы, возможно, обсудим позже. Пока можно удовлетвориться тем, что из него хорошо видно, например, что $s_{(k)} = h_k$, а $s_{(1^k)} = e_k$.

Представления симметрических групп I

0. Групповая алгебра (напоминание). Групповая алгебра $k[G]$ группы G — это векторное пространство с базисом e_g , занумерованным элементами группы G , и умножением, задаваемым правилом $e_h e_g = e_{hg}$.

Представление группы над полем k — то же самое, что $k[G]$ -модуль. В частности, $k[G]$ — представление группы G (*регулярное представление*). В это представление входят все неприводимые; можно сказать и точнее:

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{V \in \text{IrrRep}(G)} V^{\dim V}.$$

С другой стороны, как алгебра $\mathbb{C}[G]$ является прямой суммой матричных:

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{V \in \text{IrrRep}(G)} \text{End}_{\text{vect}} V.$$

Как следствие, все представления группы G одномерны тогда и только тогда, когда групповая алгебра коммутативна (т. е. сама группа коммутативна).

1. Критерий простоты ветвления. Пусть H — подгруппа группы G . Неприводимое представление группы G разлагается в сумму неприводимых представлений группы H с какими-то кратностями. Если все эти кратности равны 0 или 1, говорят о *простом ветвлении*.

Например, решившие задачу 0 последнего домашнего задания легко поймут, что для вложения $\mathbb{Z}/3 \subset S_3$ ветвление просто.

В силу леммы Шура простота ветвления для неприводимого G -представления V равносильна тому, что алгебра $\text{End}_H(V)$ коммутативна.

Как мы знаем, все линейные преобразования всех неприводимых представлений удобно упакованы в групповую алгебру $\mathbb{C}[G]$; морфизмами H -представлений из них являются те, что коммутируют с действием H , т. е. *централизатор*¹ подалгебры $\mathbb{C}[H]$ в алгебре $\mathbb{C}[G]$:

$$\bigoplus_{V \in \text{IrrRep}(G)} \text{End}_H(V) \cong Z(\mathbb{C}[H], \mathbb{C}[G]).$$

Следствие: простота ветвления для вложения $H \subset G$ равносильна коммутативности централизатора $Z(\mathbb{C}[H], \mathbb{C}[G])$.

Ясно, что этот централизатор содержит как $Z(\mathbb{C}[H])$, так и $Z(\mathbb{C}[G])$ и достаточное условие его коммутативности — равенство $Z(\mathbb{C}[H], \mathbb{C}[G]) = \langle Z(\mathbb{C}[H]), Z(\mathbb{C}[G]) \rangle$.

2. Простота ветвления для симметрической группы. Напомним, что наша цель — описать неприводимые представления симметрических групп. Как учат Вершик и Окуньков, при этом полезно рассматривать цепочку вложений² $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n$ и ветвления при соответствующих ограничениях.

Наша **первая цель** — доказать простоту ветвления для вложения $S_{n-1} \subset S_n$. Как мы знаем, простота ветвления следует из коммутативности централизатора.

¹Напомним, что $Z(B, A) = \{z \in A \mid \forall b \in B \, zb = bz\}$; в частности $Z(A, A) = Z(A)$.

² S_{i-1} вложено в S_i как стабилизатор последнего элемента.

Рассмотрим проектор

$$\pi: \mathbb{C}[S_n] \rightarrow Z(\mathbb{C}[S_{n-1}], \mathbb{C}[S_n]), \quad x \mapsto \frac{1}{|S_{n-1}|} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \sigma^{-1} x \sigma.$$

Он не согласован с умножением, но если элементы a и b коммутируют, то $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ (упражнение). Поэтому централизатор (мультипликативно) порожден образами циклов.

Ясно еще, что π проецирует алгебру $\mathbb{C}[S_{n-1}]$ на ее центр. Значит, централизатор порожден алгеброй $Z(\mathbb{C}[S_{n-1}])$ и образами циклов c_i вида $(1\ 2\ \dots\ i-1\ n)$.

Лемма. Централизатор порожден $Z(\mathbb{C}(S_{n-1}))$ и элементом Юнга–Юциса–Мёрфи

$$X_n := (1\ n) + (2\ n) + \dots + (n-1\ n),$$

совпадающим с точностью до множителя с $\pi(1\ n)$.

Для доказательства леммы нужно проверить, что $\pi(c_i) \in \langle Z(\mathbb{C}(S_{n-1})), X_n \rangle$. *Указание:* для доказательства шага индукции рассмотрите разность $\pi(c_{i+1}) - X_n \cdot \pi(c_i)$.

Из леммы сразу следует коммутативность централизатора. Действительно,

$$Z(\mathbb{C}[S_{n-1}], \mathbb{C}[S_n]) = \langle Z(\mathbb{C}(S_{n-1})), X_n \rangle \subset \langle Z(\mathbb{C}[S_{n-1}]), Z(\mathbb{C}[S_n]) \rangle$$

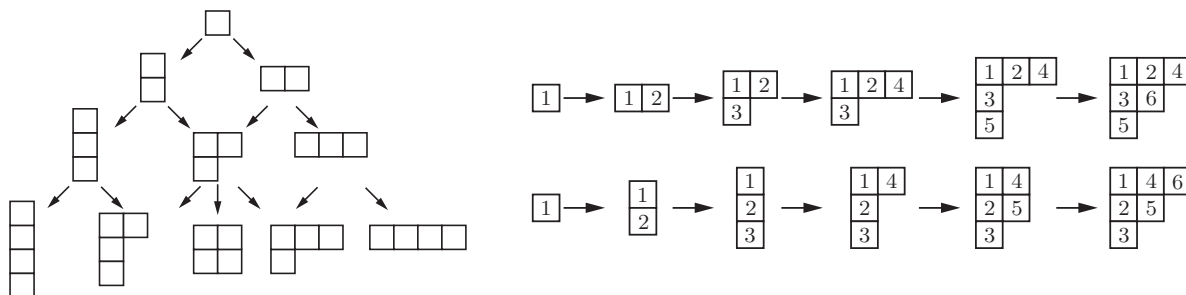
(включение имеет место, так как если прибавить к X_n сумму всех транспозиций из S_{n-1} получится сумма всех транспозиций из S_n ; в действительности имеет место даже равенство, поскольку включение $\langle Z(\mathbb{C}[S_{n-1}]), Z(\mathbb{C}[S_n]) \rangle \subset Z(\mathbb{C}[S_{n-1}], \mathbb{C}[S_n])$ очевидно).

3. Граф Юнга (анонс). Рассмотрим граф, вершины которого суть представления S_n для всевозможных n , а ребро ведет из $U \in \text{IrrRep}(S_{n-1})$ в $V \in \text{IrrRep}(S_n)$, если U входит в разложение $V|_{S_{n-1}}$.

По этому графу можно понять, как неприводимое представление группы S_n раскладывается в сумму неприводимых представлений группы S_{n-k} : получается сумма концов всех путей, ведущих из этого представления на k этажей вниз.

В частности, любое представление V разлагается в сумму одномерных пространств, количество которых — число путей из корня нашего графа (единственного неприводимого представления S_1) в вершину V . Выбрав в каждом таком одномерном пространстве по вектору, можно получить в каждом представлении *базис Гельфанда–Цетлина* (этот базис задан почти канонически: каждый из векторов можно, конечно, домножать на константу).

Как мы увидим на следующей лекции, в действительности этот граф ветвления — это в точности *граф Юнга*, вершины которого суть диаграммы Юнга, а каждое ребро соответствует добавлению клетки. Соответственно, пути из корня (т. е. элементы базиса Гельфанда–Цетлина) нумеруются таблицами Юнга (стандартными таблицами) данной формы. В частности, доказанная на прошлой лекции формула крюков является формулой для размерности неприводимого представления симметрической группы.



Представления симметрических групп II

4. Действие образующих на базисе Гельфанда–Цетлина. Как обсуждалось на прошлой лекции, каждое неприводимое представление группы S_n обладает базисом (“Гельфанда–Цетлина”) из общих собственных векторов элементов Юнга–Юциса–Мёрфи

$$X_i := (1\ i) + (2\ i) + \dots + (i-1\ i).$$

(Можно сказать, что коммутативная алгебра, ими порожденная, играет роль, до некоторой степени аналогичную максимальному тору группы Ли.)

Обозначим через v_α элемент базиса Гельфанда–Цетлина, на котором X_i действует с собственным значением α_i . Как могут действовать образующие $(i-1\ i) =: s_{i-1}$? Элементы X_{i-1} , X_i и s_{i-1} удовлетворяют соотношениям (вырожденной аффинной) алгебры Гекке

$$H(2) := \mathbb{C}\{X, X', s\} / \langle XX' = X'X, s^2 = 1, sX - X's = 1 \rangle.$$

В задаче 1 последнего домашнего задания предлагалось описать представления этой алгебры. Сделав это, нетрудно увидеть (указание: начните с базиса v, sv и диагонализуйте операторы X и X'), что

$$s_{i-1}v_\alpha = \begin{cases} \pm v_\alpha, & \text{если } \alpha_i = \alpha_{i-1} \pm 1; \\ v_{s_{i-1}\alpha} + \frac{1}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} v_\alpha, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (*)$$

5. Вектора содержаний и допустимые перестановки. Из последней формулы видно, что вектор α собственных значений УЖМ-элементов (“вектор содержаний”) *полностью задает неприводимое представление!* Возникает естественная программа дальнейших действий:

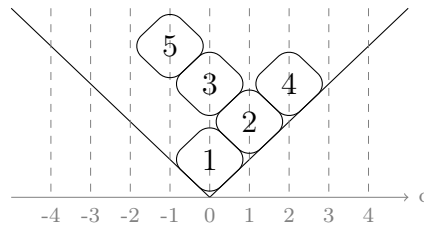
- описать вектора содержаний, происходящие из представлений группы S_n (а не алгебры $H(n)$, фактором которой является $\mathbb{C}[S_n]$);
- выяснить, какие вектора содержаний эквивалентны (т. е. соответствуют разным элементам базиса одного и того же представления).

Как мы вскоре увидим, все вектора содержаний целочисленны. Из формулы (*) видно, что эквивалентные вектора получаются друг из друга перестановками — но *допустимы* не все перестановки: соседние элементы разрешается переставлять только если они отличаются более чем на единицу.

Пример: для векторов содержаний $(0, 1, \dots, n-1)$ и $(0, -1, \dots, -n+1)$ допустимые перестановки отсутствуют (т. е. соответствующие представления одномерны), а все кокстеровские образующие действуют умножением на $+1$ и -1 соответственно (т. е. это соответственно тривиальное и знаковое представления). *Еще пример:* $(0, 1, -1) \sim (0, -1, 1)$.

6. Вектора содержаний и таблицу Юнга. Сопоставим вектору содержаний диаграмму следующим образом. Будем сбрасывать в угол, образованный лучами $(1, 1)$ и $(-1, 1)$, клетки: сначала квадратик с меткой 1 из точки $(\alpha_1, +\infty)$, потом квадратик с меткой 2 из точки $(\alpha_2, +\infty)$ и т. д. (клетки падают вертикально вниз пока могут, но не «съезжают» по горизонтали; см. рис.).

Такое определение имеет хотя бы то достоинство, что допустимые перестановки сохраняют, очевидно, форму диаграммы. Наша **цель** — доказать, что допустимые диаграммы суть таблицы Юнга, а все таблицы данной формы отличаются на допустимую перестановку.

Рис. 1: Диаграмма для $\alpha = (0, 1, 0, 2, -1)$.

Как убедиться, что допустимая диаграмма является таблицей Юнга? Достаточно доказать всего 3 вещи:

- содержания всех клеток целочисленны;
- до клетки с содержанием $n > 0$ есть клетка с содержанием $n - 1$ ($n + 1$ при $n < 0$);
- между двумя клетками с содержанием n есть клетки с содержаниями $n \pm 1$.

(Достаточно, отметим, чтобы фигура имела правильную форму, условие стандартности таблицы выполняется тогда автоматически.)

Первые два условия выполнены, так как в противном случае допустимыми перестановками можно сделать первую координату вектора содержаний ненулевой (а $X_1 = 0$ действует, конечно, с нулевым собственным значением).

Перейдем к третьему условию. Фрагмент вида $n, n \pm 1, n$ не может входить в вектор содержаний, так как на таком векторе не выполнены соотношения Кокстера ($s_i s_{i+1} s_i$ и $s_{i+1} s_i s_{i+1}$ действуют противоположными знаками). Остальные случаи сводятся к этому допустимыми перестановками (указание: возьмем минимальный по включению фрагмент вида n, \dots, n и начнем сдвигать его края друг к другу...).

Наконец, то, что все стандартные таблицы данной формы получаются друг из друга допустимыми перестановками — несложное упражнение (можно, например, получать все таблицы из таблицы, в которой числа расставлены последовательно по строкам).

7. Теория представлений симметрических групп (recapitulation). Итак, доказано следующее.

- Неприводимые представления симметрической группы S_n нумеруются диаграммами Юнга из n клеток.
- Элементы базиса Гельфанда–Цетлина данного неприводимого представления нумеруются стандартными таблицами данной формы. Элемент X_i действует на векторе базиса с собственным значением, равным содержанию i -й клетки.
(Это описание отлично согласовано с ограничениями на меньшие подгруппы; в частности, хорошо видно правило ветвления: ограничение неприводимого представления S_n на S_{n-1} есть сумма всевозможных “откусываний клетки”.)
- Кокстеровские образующие действуют на базисных элементах по формуле (*).

Чего еще можно было бы желать? Хотелось бы еще описать *характеры* неприводимых представлений. Это будет сделано на одной из следующих лекций.

Строго говоря, желательно было бы еще проверить, что построенное соответствие между неприводимыми представлениями и диаграммами Юнга то же, что возникает в других конструкциях (симметризаторы Юнга, двойственность Шура–Вейля), но этого мы делать не будем.

Правило Мурнагана–Накаямы I (13.11.2013)

Пусть $\chi_{\lambda\mu}$ — значение характера неприводимого представления симметрической группы S_n , соответствующего диаграмме Юнга λ из n клеток, на перестановке с циклической структурой, соответствующей разбиению μ числа n .

Наша цель — описать эти числа: сначала в терминах комбинаторики диаграмм и таблиц, а затем в терминах симметрических функций.

1. Разминка: характер транспозиции. Кое-что нам уже известно: значение характера в единице — это размерность представления, т. е. количество стандартных таблиц формы λ .

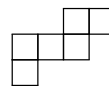
Так как у нас есть явные формулы для действия кокстеровских образующих в базисе Гельфанда–Цетлина, нетрудно найти и характер транспозиции:

$$(s_{i-1}v_\alpha, v_\alpha) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } \alpha_i = \alpha_{i-1} \pm 1; \\ (\alpha_i - \alpha_{i-1})^{-1}, & \text{иначе;} \end{cases}$$

в частности, если числа $i-1$ и i стоят в разных строках и столбцах, вклады двух таблиц, отличающихся только их перестановкой, сокращаются; окончательно получаем, что $\chi_\lambda((i-1\ i))$ есть число стандартных таблиц формы λ , в которых $i-1$ и i стоят в одной строке, минус число стандартных таблиц формы λ , в которых они стоят в одном столбце.

Это подсказывает (и чуть позже мы это докажем), что в след $\chi_\lambda((i\ i+1\ \dots\ k)\dots)$ вносят вклад только те стандартные таблицы, в которых содержания клеток с номерами от i до k образуют промежуток целых чисел.

2. Правило Мурнагана–Накаямы (формулировка). Связные наборы клеток, содержания которых образуют промежуток целых чисел, называются *лентами*¹; их можно еще описать как связные множества клеток, не содержащие клеток на одной (идущей влево-вниз) диагонали.



Ленточная таблица формы λ и веса μ — это нестрогая монотонная по строкам и столбцам таблица формы λ , в которой клетки с числом i образуют ленту длины μ_i . *Знак* ленты полагаем равным -1 , если она имеет четную высоту и $+1$ иначе; знак ленточной таблицы — произведение знаков входящих в нее лент.

Теорема. $\chi_{\lambda\mu}$ равно числу ленточных таблиц формы λ и веса μ , подсчитанному с учетом знаков.

(В частности, ленточные таблицы веса (1^n) суть стандартные таблицы и все имеют знак плюс — это отлично согласуется с тем, что значение характера в единице равно размеру базиса Гельфанда–Цетлина. Хорошо согласовано такое описание и с вычислением характера транспозиции выше.)

Правило Мурнагана–Накаямы II (04.12.2013)

3. План доказательства. В качестве представителя класса сопряженности μ возьмем перестановку $(1\ \dots\ \mu_1)(\mu_1 + 1\ \dots\ \mu_1 + \mu_2)\dots(n - \mu_k + 1\ \dots\ n)$.

¹Или косыми крюками; по-английски ribbon или rim hook.

Ее действие зависит только от ограничение представления V_λ на $S_\mu := S_{\mu_1} \times \dots \times S_{\mu_k}$; более того, след действия этого элемента равен произведению следов длинных циклов в соответствующих представлениях S_{μ_i} . Эти представления полностью задаются формой косой диаграммы, образованной соответствующими клетками (действительно, по их содержаниям восстанавливается действие кокстеровских образующих).

Наша цель — доказать, что длинный цикл действует в таком представлении с нулевым следом, если соответствующая косая диаграмма Юнга не является ленточкой, и со следом, равным знаку ленточки, если является. Для этого достаточно доказать всего 3 вещи:

- (1) если косая диаграмма несвязна, то след длинного цикла равен нулю;
- (2) если косая диаграмма является лентой, то след длинного цикла равен знаку этой ленты;
- (3) если косая диаграмма содержит квадрат 2×2 , то след длинного цикла равен нулю.

В условиях утверждения (1), как уже обсуждалось на лекции 10, представление индуцировано с \boxtimes -произведения представлений, соответствующих связным компонентам диаграммы, и из формулы для характера индуцированного представления следует, что след длинного цикла действительно равен 0.

Утверждения (2) и (3) мы проверим сначала для обычных (прямых) диаграмм, а для доказательства общего случая воспользуемся выпрямлением (“игрой в 15”).

4. Случай прямой диаграммы. Произведение $X_2 \dots X_n$ YJM -элементов равно сумме всех длинных циклов в S_n (это легко доказать индукцией по n). Поэтому след длинного цикла легко вычислить: он равен произведению содержаний всех клеток, кроме нижнего угла, умноженному на размерность и деленному на количество длинных циклов.

Если диаграмма содержит квадрат 2×2 , то кроме угла есть еще хотя бы одна клетка с нулевым содержанием, и это произведение равно нулю.

Иначе диаграмма является крюком с ногой (высотой) l и рукой a и след равен

$$(-1)^{l-1}(l-1)!(a-1)! \cdot \binom{a+l-2}{l-1} \cdot \frac{1}{(a+l-2)!} = (-1)^{l-1}.$$

(Упражнение: это представление является $(l-1)$ -й внешней степенью тавтологического.)

5. Случай косой диаграммы. Обсуждавшаяся на 10 лекции операция выпрямления позволяет разложить представление, соответствующее косой диаграмме, по представлениям, соответствующим прямым диаграммам.

Утверждение (2) следует из того, что косой крюк выпрямляется в (один) прямой крюк той же высоты (действительно, при эвакуации каждой пустой клетки угол “вминается” внутрь).

Для доказательства утверждения (3) достаточно заметить, что каждая из диаграмм, получающихся выпрямлением диаграммы, содержащий квадрат 2×2 , сама содержит квадрат 2×2 .

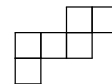
Посмотрим на эвакуацию одной пустой клетки. Если смотреть на диаграмму вместе с этой клеткой, то ее форма от эвакуации не поменялась. До эвакуации в эту форму входило минимум два (возможно пересекающихся) квадрата 2×2 : настоящий, и включающий пустую клетку. Значит, и после эвакуации останется хотя бы один настоящий квадрат 2×2 . (В статье Вершика–Окунькова можно найти другой, представленийский аргумент.)

Правило Мурнагана–Накаямы доказано.

Характеры представлений симметрических групп II

0. Напоминание. Пусть $\chi_{\lambda\mu}$ — значение характера неприводимого представления симметрической группы S_n , соответствующего диаграмме Юнга λ из n клеток, на перестановке с циклической структурой, соответствующей разбиению μ числа n .

Связные наборы клеток, содержания которых образуют промежуток целых чисел, называются *лентами*¹; их можно еще описать как связные множества клеток, не содержащие клеток на одной (идущей влево-вниз) диагонали.



Ленточная таблица формы λ и веса μ — это нестрогая монотонная по строкам и столбцам таблица формы λ , в которой клетки с числом i образуют ленту длины μ_i . *Знак* ленты полагаем равным -1 , если она имеет четную высоту и $+1$ иначе; знак ленточной таблицы — произведение знаков входящих в нее лент.

Правило Мурнагана–Накаямы. $\chi_{\lambda\mu}$ равно числу ленточных таблиц формы λ и веса μ , подсчитанному с учетом знаков.

(В частности, ленточные таблицы веса (1^n) суть стандартные таблицы и все имеют знак плюс — это отлично согласуется с тем, что значение характера в единице равно размеру базиса Гельфанда–Цетлина.)

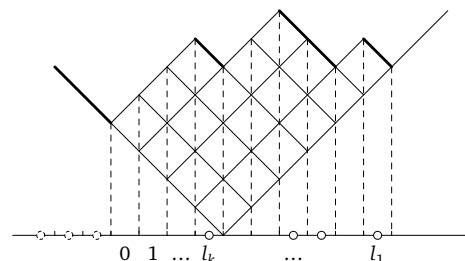
1. Разложение функций Шура по функциям Ньютона. Числа $\chi_{\lambda\mu}$ напоминают слегка числа Костки. При $\mu = (1^n)$ даже буквально $\chi_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu}$.

Лемма. $s_\mu p_k = \sum \text{sgn}(\lambda/\mu) s_\lambda$, где сумма ведется по всем диаграммам λ , получающимся из μ добавлением k -клеточной ленты.

Другими словами, $a_{\mu+\delta} p_k = \sum \text{sgn}(\lambda/\mu) a_{\lambda+\delta}$.

Вместо алгебраических манипуляций в духе доказательств из лекции 2 можно воспользоваться “бозонно-фермионным соответствием”, делающим эту лемму очевидной.

Диаграмма Юнга λ задается формой своей границы, т. е. последовательностью вертикальных и горизонтальных отрезков. Заменяем эту последовательность на последовательность ячеек, в соответствующие вертикальным отрезкам ячейки положим по шарик (см. рис.). Другими словами, i -й строке диаграммы соответствует шарик в ячейке с номером $l_i = \mu_i + \delta_i$.



На этой картинке хорошо виден многочлен $a_{\mu+\delta}$: нужно просто сопоставлять набору шариков α моном x^α и считать шарик “фермионным” (т. е. брать антисимметризацию по разным нумерациям шариков)².

Пример: $\square \bullet \square \square \bullet \rightarrow \square \textcircled{2} \square \square \textcircled{1} - \square \textcircled{1} \square \square \textcircled{2} \rightarrow x_1^4 x_2 - x_1 x_2^4$.

Умножение на p_k соответствует сумме всевозможных сдвигов одного из шариков на k позиций вправо (при этом мы считаем нулевыми конфигурации, в которых несколько шариков попало в одну ячейку — им как раз соответствует нулевой многочлен).

А если смотреть на форму диаграммы Юнга, то сдвиг шарика соответствует добавлению к диаграмме ленточки, при котором снова получается диаграмма Юнга. Возникает

¹Или косыми крюками; по-английски ribbon или gim hook.

²Формально: рассмотрим счетномерное пространство V с базисом $e_i, i \in \mathbb{Z}$; его *полубесконечной внешней степени* будем называть векторное пространство, натянутое на косые мономы e_α , отличающиеся лишь в конечном числе позиций от $\dots \wedge e_{-3} \wedge e_{-2} \wedge e_{-1}$. Наконец, будем отождествлять элементы $\Lambda^{\infty/2} V$ с кососимметрическими многочленами при помощи отображения $e_\alpha \leftrightarrow x^\alpha$.

Косые многочлены Шура

0. Напоминание: индуцирование. Представление группы можно *ограничить на подгруппу*. У этого функтора есть сопряженный слева: $\text{Hom}(\text{Ind}_H^G W, V) \cong \text{Hom}(W, \text{Res}_H^G V)$ (“взаимность Фробениуса”).

Как векторное пространство (и даже как H -представление) $\text{Ind}_H^G W = V[G/H]$ (и действие G вводится естественным способом). Пример: регулярное представление есть результат индуцирования тривиального представления с тривиальной подгруппы.

Характер ограничения — ограничение центральной функции. Характер индуцирования — push-forward центральной функции:

$$\chi(\text{Ind}_H^G W)(g) = \sum_{\sigma \in G/H} \chi(W)(\sigma^{-1}g\sigma),$$

где слагаемое считается нулевым, если $\sigma^{-1}g\sigma \notin H$ (в частности, характер индуцированного представления обращается в ноль на элементах, не сопряженных никакому элементу H).

1. Перемножение функций и представлений. На прошлой лекции было построено характеристическое отображение Фробениуса, переводящее центральные функции на S_n в симметрические функции степени n , при котором характер неприводимого представления χ_λ переходит в многочлен Шура s_λ .

Один из первых возникающих вопросов — каков представленный смысл умножения симметрических функций. Ответ: нужно тензорно перемножить два представления, а потом индуцировать результат с $S_n \times S_m$ на S_{n+m} ,

$$\text{ch}(U) \cdot \text{ch}(V) = \text{ch}(\text{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}}(U \boxtimes V)).$$

(указание: воспользуйтесь мультипликативностью следа при тензорном произведении и формулой для характера индуцированного представления).

Мгновенное следствие: *коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона* (структурные константы алгебры симметрических функций в базисе из многочленов Шура, $s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda$) суть целые неотрицательные числа.

2. Операция, сопряженная к умножению, и косые многочлены Шура. Для произвольной симметрической функции f определим f^\perp , как оператор, сопряженный к умножению на f : $\langle fu, v \rangle = \langle u, f^\perp v \rangle$.

Как всегда можно ограничиться изучением того, что происходит с базисом, многочленами Шура. Многочлен $s_{\lambda/\mu} = s_\mu^\perp s_\lambda$ (т.е. такой многочлен, что $\langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle$) называется *косым многочленом Шура*.

Можно понять и представленный смысл этих многочленов: так как умножению сопряжено (справа) взятие гомоморфизмов, а индуцированию (тоже справа) — ограничение,

$$\begin{aligned} \langle \text{ch}(U) s_\mu, s_\lambda \rangle &= \dim \text{Hom}_{S_n}(\text{Ind}(U \boxtimes V^\mu), V^\lambda) = \dim \text{Hom}_{S_n \times S_{n-m}}(U \boxtimes V^\mu, V^\lambda) = \\ &= \dim \text{Hom}_{S_{n-m}}(U, \text{Hom}_{S_m}(V^\mu, V^\lambda)) = \langle \text{ch}(U), \text{ch} \text{Hom}_{S_m}(V^\mu, V^\lambda) \rangle, \end{aligned}$$

т.е. $s_{\lambda/\mu}$ является образом при отображении Фробениуса пространства $\text{Hom}_{S_{|\mu|}}(V^\mu, V^\lambda)$ (рассматриваемого как представление $S_{|\lambda|-|\mu|}$).

Теорема. $s_\lambda(x, y) = \sum_\mu s_\mu(x) s_{\lambda/\mu}(y)$.

В качестве рекламы представлеческого подхода приведем два разных доказательства.
Доказательство 1. Из произведения Коши

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x, y) s_{\lambda}(z) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i z_j} \prod_{i,j} \frac{1}{1 - y_i z_j} = \sum_{\mu, \nu} s_{\mu}(x) s_{\mu}(z) s_{\nu}(y) s_{\nu}(z),$$

что равно

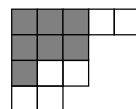
$$\sum_{\lambda, \mu, \nu} s_{\mu}(x) s_{\nu}(y) s_{\lambda}(z) \langle s_{\lambda}, s_{\mu} s_{\nu} \rangle = \sum_{\lambda, \mu, \nu} s_{\mu}(x) s_{\nu}(y) s_{\lambda}(z) \langle s_{\lambda/\mu}, s_{\nu} \rangle = \sum_{\mu, \lambda} s_{\mu}(x) s_{\lambda/\mu}(y) s_{\lambda}(z).$$

Приравнивая коэффициенты при $s_{\lambda}(z)$, получаем утверждение теоремы. □

Доказательство 2. $V^{\lambda} \cong V^{\mu} \boxtimes \text{Hom}(V^{\mu}, V^{\lambda})$ как $S_m \times S_n$ -представление. □

В силу линейности отсюда следует, что вообще для любой симметрической функции f имеет место равенство $f(x, y) = \sum_{\mu \subset \lambda} s_{\mu}(x) \cdot (s_{\mu}^{\perp} f)(y)$ — что проясняет смысл операции $(-)^{\perp}$.

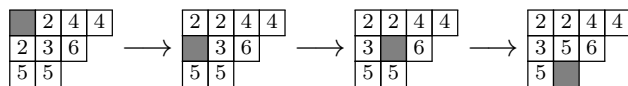
С другой стороны, из этой теоремы сразу следует комбинаторная интерпретация косых многочленов Шура. *Косой диаграммой Юнга* формы $\lambda - \mu$ называется результат выкидывания из диаграммы λ всех клеток, принадлежащих ее поддиаграмме μ .



Предложение. $s_{\lambda/\mu}(x) = \sum x^T$, где сумма берется по всем полустандартным таблицам формы $\lambda - \mu$. (Действительно, $s_{\lambda}(x, y)$ — это сумма по полустандартным таблицам; их можно сгруппировать по тому, какую диаграмму образуют все номера, соответствующие переменным $x \dots$)

3. Умножение многочленов Шура и игра в 15. Как мы уже видели при доказательстве теоремы, $\langle s_{\lambda/\mu}, s_{\nu} \rangle = \langle s_{\lambda}, s_{\mu} s_{\nu} \rangle = c_{\mu\nu}^{\lambda}$, т.е. $s_{\lambda/\mu} = \sum c_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\nu}$. Так что чтобы научиться перемножать многочлены Шура, достаточно научиться разлагать косые многочлены Шура по базису из обычных.

Существует абсолютно каноническая процедура *выпрямления* косой полустандартной таблицы (без изменения веса). Эта процедура (“jeu de taquin”) является вариацией на тему игры в 15: на каждом шаге нужно выбрать любую из угловых дырок и посмотреть на ее соседей справа и снизу — кто из них меньше, того и двигаем на место дырки; если они равны — двигаем нижнего (тогда как раз сохраняется полустандартность — и в итоге косая таблица превращается в настоящую).



Теорема. i. Результат выпрямления не зависит от последовательности выбора углов.
 ii. Количество таблиц формы λ/μ с данным выпрямлением T зависит только от формы ν таблицы T — и, как следствие, совпадает с коэффициентом Литтлвуда–Ричардсона $c_{\mu\nu}^{\lambda}$.

Можно теперь сказать про умножение и по-другому: возьмем косую таблицу, являющуюся несвязным объединением таблиц формы μ и ν и будем ее выпрямлять. Если подсчитать, сколько при этом раз встретилась (какая-то фиксированная) таблица T формы λ , снова получится $c_{\mu\nu}^{\lambda}$.

Это равенство, « $\text{Rect}(\mu * \nu, \lambda) = \text{Rect}(\lambda/\mu, \nu)$ », можно рассматривать как комбинаторную форму утверждения, уже знакомого нам в алгебраической и представлеческой формах.