

Летняя школа «Современная математика»  
Дубна, июль 2019

Е. Ю. Смирнов

# Фризы и цепные дроби

Москва  
Издательство МЦНМО

УДК 511.41  
ББК 22.13  
С50

**Смирнов Е. Ю.**  
С50 **Фризы и цепные дроби.** — М.: МЦНМО, 2022. — 64 с.  
ISBN 978-5-4439-1701-6

В брошюре рассказывается о числовых фризах, определенных Дж. Конвеем и Д. Кокстером в 1970-х гг. Это таблицы целых чисел, построенные по некоторому комбинаторному правилу и обладающие рядом глубоких и неожиданных свойств. В частности, они нумеруются триангуляциями многоугольников, возникают в разложениях чисел в цепные дроби и связаны с соотношениями в модулярной группе.

Брошюра написана по материалам лекций, прочитанных автором на летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2019 г. Она рассчитана на старшеклассников и студентов младших курсов.

ББК 22.13

Научно-популярное издание

*Евгений Юрьевич Смирнов*

**ФРИЗЫ И ЦЕПНЫЕ ДРОБИ**

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04

Подписано в печать 27.01.2022 г. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Печ. л. 4. Тираж 800. Заказ .

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».

Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.  
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89  
E-mail: mittelpress@mail.ru

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине  
«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.  
Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mcme.ru

---

ISBN 978-5-4439-1701-6



9 785443 917016 >

© МЦНМО, 2022.

## Введение

*Фауст:*

Так пентаграмма этому виной?  
Но как же, бес, пробрался ты за мной?  
Каким путем впросак попался?

*Мефистофель:*

Изволили ее вы плохо начертить,  
И промежуток в уголку остался,  
Там, у дверей, — и я свободно мог вскочить.

*Фауст:*

Да, случай над тобой удачно посмеялся.  
Так ты мой пленник, стало быть?  
Вот удалось негаданно-нежданно!

И.-В. Гёте. Фауст.  
Пер. Н. Холодковского.

Фризами называются таблицы, заполненные положительными числами в соответствии с некоторым простым правилом. Эти таблицы были впервые определены в 1970-х гг. в работах Д. Кокстера и Дж. Конвея. Несмотря на простоту их определения, фризы обладают рядом весьма неожиданных свойств. Они связаны со множеством других математических понятий, в числе которых — триангуляции многоугольников, числа Каталана и Фибоначчи, цепные дроби, ряды Фарея... Кроме того, оказалось, что фризы (так, конечно, тогда не называвшиеся) рассматривались еще в работах К.-Ф. Гаусса и Дж. Непера.

В 2000-х гг. интерес к фризам среди математиков существенно вырос в связи с появлением теории кластерных алгебр, основные понятия которой были введены в работах А. В. Зелевинского и С. В. Фомина. Оказалось, что фризы возникают в связи с представлениями колчанов, многообразиями Грассмана, эллиптическими функциями, обобщенными ассоциэдрами и многими другими сюжетами из современной математики.

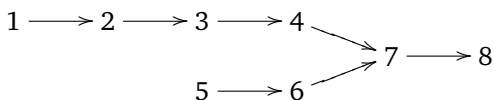
В этой брошюре мы начнем с классических вопросов о фризах, рассматривавшихся Кокстером и Конвеем. Этому посвящены первые четыре главы. В первой главе мы приведем основные определения, сделаем ряд наблюдений о фризах (которые будут доказаны впоследствии),

а также расскажем о предыстории вопроса — о том, как фризы появлялись в работах Гаусса и его предшественников. Вторая глава посвящена феномену целочисленности фризов. Мы покажем, что элементы фриза вычисляются как полиномы с целыми коэффициентами — континуанты — от элементов начальной строки. В третьей главе мы продолжаем изучение фризов и выводим соотношения на элементы его строк и диагоналей. Основным результатом четвертой главы — классификация всех целочисленных фризов. Как будет показано, целочисленные фризы порядка  $n$  биективно соответствуют триангуляциям выпуклого  $n$ -угольника; при этом все элементы фриза можно восстановить по этой триангуляции с помощью несложного алгоритма.

Пятая и шестая главы посвящены разложениям рациональных чисел в цепные дроби двух видов: «обычные», или положительные, и отрицательные (при определении которых целая часть берется не с недостатком, а с избытком). Мы формулируем свойства цепных дробей на языке матриц второго порядка и в шестой главе устанавливаем связь между двумя типами разложений. Мы также показываем, что разложению рационального числа в цепную дробь отвечает некоторая специальная триангуляция многоугольника. Оказывается, что по ней можно восстановить различные характеристики этой цепной дроби: подходящие дроби, длину цепной дроби и т. д. Тем самым цепные дроби оказываются связаны с фризами: каждое рациональное число определяет целочисленный фриз с той же триангуляцией.

В седьмой и восьмой главах мы выясним, как эти сюжеты связаны с действием модулярной группы  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  на плоскости Лобачевского. А именно, всякая триангуляция описанного вида может быть получена в качестве подграфа в так называемом графе Фарей — бесконечном графе, вершинами которого являются рациональные точки на абсолютной плоскости Лобачевского, а ребрами — прямые, соединяющие точки  $p/q$  и  $r/s$ , для которых  $ps - qr = \pm 1$ . Этот граф сохраняется модулярной группой  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ . Мы опишем конструкцию, которая позволяет построить по рациональному числу (или отвечающей ему триангуляции многоугольника) некоторый элемент модулярной группы, явно выраженный через ее стандартные образующие. Наконец, мы выясним, как триангуляции (и обобщающие их  $3d$ -разрезания) многоугольников связаны с соотношениями на образующие модулярной группы.

Схема зависимости глав выглядит следующим образом:



Читатель, больше интересующийся цепными дробями, вполне может пропустить первые четыре главы и начать с пятой; отсылки к предыдущему тексту в главах 5—6 немногочисленны.

В основу брошюры лег миникурс из трех лекций, прочитанных мною на XIX Летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2019 года. Идея рассказать о фризах возникла у меня в результате общения с В. Ю. Овсиенко и С. Морьер-Жену в ходе летней школы «Теория представлений групп Ли, математическая физика и комбинаторика» (Реймс, Франция) в июне того же года. Кроме того, я использовал материалы своего миникурса о цепных дробях и их связи с модулярной группой, прочитанного на онлайн-школе «Комбинаторика и алгоритмы» в феврале 2021 года. Я благодарен организаторам и слушателям этих школ.

Хочу отметить, что эта брошюра ни в коей мере не претендует на полноту охвата литературы по фризам; для этого рекомендую читателю обратиться к обзорам и специальным статьям по этой тематике. Например, можно начать с замечательного обзора С. Морьер-Жену [11]. Кроме того, подборку ссылок на литературу о фризах и их взаимосвязях с другими областями математики можно найти на домашней странице А. А. Феликсон: <http://www.maths.dur.ac.uk/users/anna.felikson/Projects/frieze/frieze-res.html>

Разумеется, вся эта литература написана на английском языке; единственные (кроме недавней статьи [6] в «Кванте», примерно совпадающей с первыми главами этой брошюры) русскоязычные тексты о фризах, известные автору, — это короткая заметка Мартина Гарднера в его книге «Крестики-нолики» [2, с. 226—228] и статья Джона Конвея в журнале «Квант» [3], содержащая больше вопросов, чем ответов.

Я признателен коллегам, читавшим предварительные версии этой брошюры и высказывавшим свои замечания: В. А. Клепцыну, Г. А. Мерзону, В. Ю. Овсиенко, С. Л. Табачникову, А. А. Феликсон и другим. Особенно ценную обратную связь я получил от А. В. Устинова; от него же я узнал о представлении континуант с помощью кодов Морзе. Наконец, я хочу поблагодарить С. Ю. Бочавер за постоянную поддержку и воодушевление; если бы не она, этот текст вряд ли оказался бы дописан.

11 апреля 2020 года, когда я дописывал первоначальную версию этих записок, на 83-м году жизни скончался Джон Хортон Конвей — один из самых удивительных и неординарных математиков нашего времени. Посвящаю этот текст его памяти.

# Глава 1. Фризы

## § 1.1. Определение и первые свойства

Начнем с несложной арифметической игры. Напишем в строчку несколько единиц. Далее возьмем набор из нескольких целых положительных чисел, не содержащий подряд двух единиц, и запишем их во второй строке так, чтобы числа стояли в шахматном порядке относительно первой строки. Затем продолжим эти две строки периодически влево и вправо. Это будут первые две строки нашей таблицы.

Продолжим заполнять таблицу сверху вниз, записывая числа в третьей, четвертой и последующих строках так, чтобы они удовлетворяли условию *унимодулярности*: для любых четырех чисел  $a, b, c, d$ , расположенных в вершинах единичного ромба

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array} \quad (1.1)$$

выполнено равенство  $ad - bc = 1$ . Будем называть такую таблицу *фризом*, если очередная строка нашей таблицы окажется снова состоящей из одних единиц.

Рассмотрим пример. Запишем во второй строке нашей таблицы последовательность (2, 1, 4, 2, 1, 3, 2), продолжив ее периодически. Тогда в третьей строке под любыми двумя соседними числами второй строки будет стоять их произведение, уменьшенное на 1, — то есть третья строка будет состоять из повторяющихся наборов (1, 3, 7, 1, 2, 5, 3). Ясно, что и у третьей, и у всех последующих строк длина периода будет той же, что и у второй строки. Вычисляя эту таблицу дальше, мы получим следующие строки:

...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
...	2	1	4	2	1	3	2	2	1	...
...	3	1	3	7	1	2	5	3	1	...
...	1	2	5	3	1	3	7	1	3	...
...	2	1	3	2	2	1	4	2	2	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Мы видим, что шестая строка оказалась состоящей из одних единиц. Согласно условию унимодулярности, следующая за ней строка будет состоять из нулей. Мы не будем ее писать и на этом завершим заполнение таблицы. Кроме того, иногда удобно считать, что и над первой строкой из единиц располагается «невидимая» нулевая строка,

также состоящая из одних нулей, — в таком случае для элементов нулевой, первой и второй строк условие унимодулярности выполнено.

Ясно, что фриз однозначно определяется своей второй строкой или, точнее, ее периодом. В дальнейшем мы будем писать что-нибудь наподобие «фриз со второй строкой (2, 1, 4, 2, 1, 3, 2)» (это фриз из предыдущего примера) без дополнительных оговорок, указывая не всю строку — она бесконечна — а только ее период.

Однако если написать во второй строке произвольные числа, пусть даже целые положительные, то фриза, скорее всего, не получится: таблица может оказаться бесконечной. Например, пусть все элементы второй строки равны 2. Тогда все элементы третьей строки будут равны 3, так как  $\frac{2 \cdot 2 - 1}{1} = 3$ , четвертой строки — 4, поскольку  $\frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4$ , и так далее. По индукции легко показать, что все элементы  $n$ -й строки окажутся равными  $n$ : действительно, из унимодулярности получаем, что  $\frac{n \cdot n - 1}{n - 1} = n + 1$ . Ясно, что элементы строк этой таблицы будут неограниченно возрастать — т. е. никогда, кроме первой строки, не окажутся равными 1. Позволяя себе некоторую вольность речи, мы иногда будем называть такие бесконечные вниз таблицы, удовлетворяющие условию унимодулярности, *бесконечными фризами*.

Глядя на предыдущий пример, можно заметить некоторые интересные свойства фризов. В частности, все элементы как конечного, так и бесконечного фриза оказываются целыми числами. Это совершенно неочевидно: из условия унимодулярности для ромбика (1.1) следует, что  $c = \frac{ad - 1}{b}$ , то есть для вычисления элементов очередной строки приходится использовать деление — однако его результат почему-то всегда оказывается целым числом. В следующей главе мы выясним, почему это так.

Теперь вернемся к «конечным» фризам — тем, которые оканчиваются строкой из единиц. Из построения ясно, что если вторая строка фриза периодична с периодом  $n$ , то и все остальные строки будут обладать тем же свойством. Однако фриз из приведенного примера дополнительно обладает скользящей симметрией: если перевернуть его вверх ногами и сдвинуть вбок на три с половиной позиции, он совпадет с исходным. В третьей главе мы покажем, что это общее свойство: фриз из  $n - 1$  строки всегда будет обладать скользящей симметрией порядка  $n/2$ , а следовательно, будет периодичен с периодом  $n$ .

Далее, можно рассматривать фризы, во второй строке у которых стоят не обязательно целые, а уже произвольные положительные числа. Оказывается, что и для них будут выполнены предыдущие свойства:

наличие скользящей симметрии и связь между числом строк и периодом фриза. Однако в основном нас будут интересовать целочисленные фризы.

**Замечание о терминологии.** В архитектуре фризом называется декоративный орнамент в виде горизонтальной полосы. В математике это слово имеет еще одно значение: *фризами* или *бордюрами* называются фигуры на плоскости, повторяющиеся только в одном направлении, т. е. переходящие в себя при параллельном переносе. В теории дискретных групп преобразований изучаются *группы фризов* (они же *группы бордюров*), описывающие возможные типы симметрий таких узоров. Оказывается, что таких групп всего семь; интересно, что Конвей<sup>1</sup> и Кокстер<sup>2</sup>, авторы понятия числового фриза, также изучали эти группы. Однако напрямую с числовыми фризами группы бордюров не связаны, и в этой брошюре мы их не рассматриваем. Желающие узнать об этом больше могут обратиться, к примеру, к статье в Википедии: [https://en.wikipedia.org/wiki/Frieze\\_group](https://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group).

## § 1.2. Фризы с малым количеством строк

Посмотрим, как могут быть устроены фризы с малым количеством строк. Фриз из двух строк, каждая из которых состоит из единиц, единственен:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\ \dots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \end{array}$$

(напомним, что сверху и снизу от строк с единицами есть «невидимые» строки из нулей, так что условие унимодулярности выполнено).

Далее, рассмотрим фриз из трех строк:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\ \dots & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \dots \\ \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \end{array}$$

Условие унимодулярности равносильно тому, что произведение любых двух соседних элементов во второй строке равняется 2. Поэтому у этого

<sup>1</sup>Джон Конвей (John Horton Conway, 1937—2020) — английский и американский математик. Ему принадлежат результаты в разнообразных областях математики: в теории групп (группы Конвея, moonshine-гипотеза), теории узлов (полином Конвея), комбинаторной теории игр (сюрреальные числа) и др. Широко известен как популяризатор математики, в частности как автор игры «Жизнь».

<sup>2</sup>Гарольд Скотт Макдональд Кокстер (H. S. M. Coxeter, 1907—2003) — английский и канадский математик. Считается одним из крупнейших геометров XX века. Автор многочисленных работ о регулярных многогранниках, дискретных группах и др. Читателю наверняка знакомы его книги «Введение в геометрию» и «Новые встречи с геометрией».



фриза два числа в строке чередуются:

$$\begin{array}{cccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\ \dots & & a_1 & & a_2 & & a_1 & & a_2 & & \dots \\ \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \end{array}$$

Здесь  $a_1 a_2 = 2$ . В частности, целочисленных фриз из 3 строк может быть два: у одного  $a_1 = 2$  и  $a_2 = 1$ , у другого  $a_1 = 1$  и  $a_2 = 2$ . Эти два фриза отличаются лишь сдвигом, но нам удобнее считать их различными. При  $a_1 = a_2$  получим нецелочисленный фриз вида

$$\begin{array}{cccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\ \dots & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \dots \\ \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \end{array}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.** Заметим, что у фриз из трех строк числа в строке повторяются с периодом 2, а не 4 (а период последнего фриза и вовсе равен 1). В этом случае наличие скользящей симметрии приводит к тому, что этот фриз из трех строк после сдвига и переворота совпадет с исходным.

### § 1.3. Фризы из четырех строк

Такой фриз можно восстановить не по второй строке, а по диагонали. Рассмотрим фриз вида

$$\begin{array}{cccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\ \dots & & x & & z & & v & & t & & \dots \\ \dots & & & y & & u & & w & & & \dots \\ \dots & & & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \end{array}$$

Выразим все его значения последовательно через  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+y}{x}; & u &= \frac{1+z}{y} = \frac{1+x+y}{xy}; & v &= \frac{1+u}{z} = \frac{1+x+y+xy}{xy} \cdot \frac{x}{1+y} = \frac{1+x}{y}; \\ w &= \frac{1+v}{u} = \frac{1+x+y}{y} \cdot \frac{xy}{1+x+y} = x; & t &= \frac{1+w}{v} = (1+x) \cdot \frac{y}{1+x} = y. \end{aligned}$$

Значения  $x$  и  $y$  повторяются, но уже на другой диагонали. Тем самым фриз имеет вид:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\ \dots & & x & & z & & v & & y & & u & & x & & z & & v & & y & & u & & \dots \\ \dots & & & y & & u & & x & & z & & v & & y & & u & & x & & z & & v & & \dots \\ \dots & & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \end{array}$$

Видим, что фриз опять получается периодичным с периодом 5, и он вновь обладает скользящей симметрией.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.2.** Перечислите все целочисленные фризы из четырех строк. Сколько их?

Замечание 1.3. Если, как мы и делали, рассматривать элементы фриза как рациональные функции от  $x$  и  $y$ , то в знаменателе этих рациональных функций всегда оказывается одночлен. Иными словами, они оказываются *многочленами Лорана*, в которых разрешено использовать и отрицательные целые степени переменных. Поскольку мы зачастую делим вовсе не на одночлен — можно отметить, что «загадочным образом» деление опять-таки всегда происходит нацело, правда, уже в кольце многочленов Лорана. Это наблюдение, известное как *феномен Лорана*, имеет далеко идущие обобщения в теории кластерных алгебр.

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Выразите элементы фриза из пяти строк через значения на диагонали. Будет ли в этом случае иметь место феномен Лорана?

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Рассмотрим фриз из четырех строк, у которого  $x = y = \tau$ . Покажите, что  $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , и найдите остальные элементы этого фриза.

Последний фриз можно получить из правильного пятиугольника следующим образом. Рассмотрим правильный пятиугольник, все стороны которого равны 1 (рис. 1.1). Пусть его диагональ равна  $\tau$ . Напом-

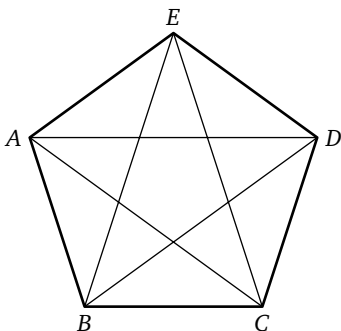


Рис. 1.1. Правильный пятиугольник

ним *теорему Птолемея*<sup>1</sup> из школьного курса планиметрии: для вписанного четырехугольника  $ABCD$  верно равенство  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ . Запишем теорему Птолемея для равнобокой трапеции  $ABCD$

<sup>1</sup>Клавдий Птолемей (ок. 100—ок. 170) — древнегреческий математик, астроном, астролог, географ и теоретик музыки. В своем знаменитом трактате по астрономии «Альмагест» предложил геоцентрическую модель мира, в которой движение небесных светил представляется как комбинация равномерных движений по окружностям. Составил таблицу хорд, соответствующих углам в целое число градусов, ввел деление градуса на минуты и секунды.

с  $AB = BC = CD = 1$ ,  $AD = AC = BD = \tau$ . Мы получим уравнение

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot \tau = \tau \cdot \tau, \quad \text{т. е.} \quad \tau^2 - \tau - 1 = 0.$$

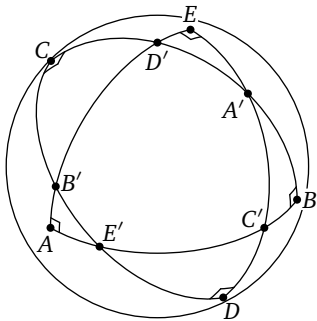
Положительный корень этого уравнения как раз равен  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ; это знаменитое *золотое сечение*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Рассмотрим правильный  $n$ -угольник со стороной 1 и многократно применим к нему теорему Птолемея. Какой фриз мы получим? Чему равны элементы в его  $k$ -й строке?

### § 1.4. Pentagramma mirificum

Впервые фризизы из четырех строк появились в работах Н. Тарпорли<sup>1</sup> и Дж. Непера<sup>2</sup>. Дальнейшее развитие они получили в работах Гаусса<sup>3</sup>. Их появление было связано со следующей задачей сферической геометрии.

Рассмотрим пятиконечную звезду на единичной сфере, все углы которой являются прямыми (см. рис. 1.2). В частности, это значит, что точка  $A'$  является полюсом для большого круга  $CD$ ,  $B'$  — для  $DE$  и т. д.



*"This uniformitie of the Circular parts, most manifestly appeareth in right-angled triangles made on the superficies of a globe, of five great circles, the first whereof cutteth the second, the second the third, the third the fourth, the fourth the fifth: and lastly, the fifth the first, at right angles. But all the other Sections shall bee made at oblique angles."*

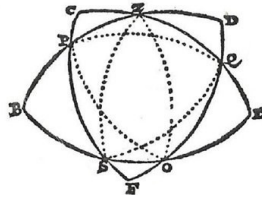


Рис. 1.2. Pentagramma mirificum. Справа рисунок из работы Непера, 1614 г.

<sup>1</sup>Натаниэль Тарпорли (Nathaniel Torporley, тж. Torporley, 1564—1632) — английский математик, астроном и астролог, некоторое время работал во Франции секретарем Франсуа Виета.

<sup>2</sup>Джон Непер (John Napier, 1550—1617) — шотландский математик, известен как изобретатель логарифмов и десятичной точки.

<sup>3</sup>Карл-Фридрих Гаусс (Carl-Friedrich Gauß, 1777—1855) — немецкий математик, физик и астроном. Ему принадлежат фундаментальные результаты в алгебре, геометрии, теории чисел, аналитической механике, теории магнетизма. Его называли *Princers Mathematicorum* — «король математиков». Памятник Гауссу в его родном Брауншвейге украшен звездой с 17 лучами, так как Гаусс первым описал построение правильного 17-угольника циркулем и линейкой.

Обозначим через  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  квадраты тангенсов длин сторон пятиугольника  $A'D'B'E'C'$ :

$$\alpha = \operatorname{tg}^2 B'E', \quad \beta = \operatorname{tg}^2 E'C', \quad \gamma = \operatorname{tg}^2 A'C', \quad \delta = \operatorname{tg}^2 A'D', \quad \varepsilon = \operatorname{tg}^2 D'B'.$$

Оказывается, что эти пять величин связаны соотношениями, позволяющими получить по любым двум из них остальные три:

$$1 + \alpha = \gamma\delta; \quad 1 + \beta = \delta\varepsilon; \quad 1 + \gamma = \varepsilon\alpha; \quad 1 + \delta = \alpha\beta; \quad 1 + \varepsilon = \beta\gamma. \quad (1.2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.7 (необязательное, для любителей сферической геометрии). Проверьте эти формулы.

Таким образом, эти величины являются элементами следующего фриза:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\ \dots & & \alpha & & \beta & & \gamma & & \delta & & \varepsilon & & \alpha & & \beta & & & & & & & & \dots \\ \dots & & & \delta & & \varepsilon & & \alpha & & \beta & & \gamma & & \delta & & \varepsilon & & & & & & & \dots \\ \dots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.8. Используя соотношения (1.2), докажите следующее равенство:

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 3 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \sqrt{(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)(1 + \delta)(1 + \varepsilon)}.$$

Это равенство в работе Гаусса названо *schöne Gleichung* — «красивое тождество».

В более современных терминах можно сказать, что фризы из 4 строк описывают *пространство модулей*  $\mathcal{M}_{0,5}$  пятерок точек на проективной прямой  $\mathbb{P}^1$ . А именно, рассмотрим пять попарно различных точек  $z_1, \dots, z_5$  на  $\mathbb{P}^1$ , с точностью до действия группы  $\operatorname{PGL}_2$ . Для любых четырех из них можно записать их двойное отношение. Пусть

$$u_1 = [z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}, \quad u_2 = [z_2 : z_3 : z_4 : z_5]$$

и т. д. Таким образом, мы получаем пять двойных отношений  $u_1, \dots, u_5$ . Можно показать, что они удовлетворяют соотношениям, аналогичным (1.2). Тем самым такие пятерки (а значит, и фризы из четырех строк) параметризуют пятерки точек на  $\mathbb{P}^1$  с точностью до проективных замен координат. Детали оставляются в качестве упражнения для заинтересованного читателя.

## Глава 2. Континуанты

### § 2.1. Рекуррентное соотношение

Теперь перейдем к фризам с произвольным количеством строк. Наша ближайшая цель — получить выражение для элементов третьей и последующих строк фриза через элементы второй строки.

Пусть дан фриз со второй строкой  $\dots, a_1, a_2, a_3, \dots$ . Ясно, что каждый из элементов третьей строки выражается через два элемента второй строки, стоящих непосредственно над ним (слева и справа). Далее, каждый элемент четвертой строки можно найти по правилу унимодлярности уже через *три* стоящих над ним элемента второй строки, и так далее. Обозначим элементы третьей строки через  $a_{12}, a_{23}, \dots$ , четвертой через  $a_{13}, a_{24}, \dots$  и т. д., как показано ниже:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\ \dots & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \dots \\ \dots & & & a_{12} & & a_{23} & & a_{34} & & & \dots \\ \dots & & & & a_{13} & & & a_{24} & & & \dots \\ \dots & & & & & a_{14} & & & & & \dots \end{array}$$

Нетрудно найти выражение для элементов третьей строки:

$$a_{12} = a_1 a_2 - 1, \quad a_{23} = a_2 a_3 - 1,$$

а из них уже выразить элементы четвертой:

$$a_{13} = \frac{a_{12} a_{23} - 1}{a_2} = a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3,$$

пятой:

$$a_{14} = \frac{a_{13} a_{24} - 1}{a_{23}} = \dots = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 - a_1 a_4 - a_3 a_4 + 1,$$

шестой:

$$a_{15} = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 - a_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 a_5 - a_1 a_4 a_5 - a_3 a_4 a_5 + a_1 + a_3 + a_5$$

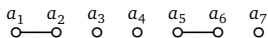
(проделайте эти вычисления самостоятельно!).

Внимательно посмотрев на эти выражения, можно заметить закономерность, которой они подчиняются.

### § 2.2. Коды Морзе

Рассмотрим  $n$  расположенных в ряд точек, которым сопоставлены переменные  $a_1, \dots, a_n$ . Теперь соединим между собой какие-нибудь пары соседних точек, с условием, что каждую точку можно соединить не

более чем с одной соседней. Мы получим «код Морзе» из точек и тире — конфигурацию наподобие следующей:



Такой конфигурации сопоставим моном (т. е. одночлен) следующего вида: произведение переменных, которые стоят в *точках*, взятое со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от четности числа имеющих *тире*. Будем называть этот моном *весом* кода Морзе  $M$  и обозначать через  $w(M)$ . Так, конфигурации с предыдущего рисунка будет отвечать выражение

$$w(M) = (-1)^2 a_3 a_4 a_7 = a_3 a_4 a_7.$$

**ПРИМЕР 2.1.** Все коды Морзе и соответствующие им мономы при  $n$  от 1 до 5 представлены в таблице 1.

Таблица 1. Коды Морзе при  $n \leq 5$

$n = 1$	○	$a_1$
$n = 2$	○ ○ ---○	$a_1 a_2$ $-1$
$n = 3$	○ ○ ○ ○ ---○ ---○ ○	$a_1 a_2 a_3$ $-a_1$ $-a_3$
$n = 4$	○ ○ ○ ○ ○ ○ ---○ ○ ---○ ○ ---○ ○ ○ ---○ ---○	$a_1 a_2 a_3 a_4$ $-a_1 a_2$ $-a_1 a_4$ $-a_3 a_4$ $1$
$n = 5$	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ---○ ○ ○ ---○ ○ ○ ---○ ○ ○ ---○ ○ ○ ○ ○ ---○ ---○ ---○ ○ ---○ ---○ ---○ ○	$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ $-a_1 a_2 a_3$ $-a_1 a_2 a_5$ $-a_1 a_4 a_5$ $-a_3 a_4 a_5$ $a_1$ $a_3$ $a_5$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** *Континуантой*  $V_n(a_1, \dots, a_n)$  *порядка*  $n$  *называется* сумма одночленов, соответствующих всевозможным кодам Морзе на  $n$  *вершинах*.

**Замечание 2.3.** Положим континуанту нулевого порядка (не зависящую от каких-либо аргументов) равной единице:  $V_0 = 1$ . Более того, иногда бывает удобно считать, что  $V_n = 0$ , если  $n$  отрицательно.

Таблица 1 позволяет вычислить континуанты порядков, не превосходящих 5. Мы видим, что получаются в точности те же выражения, что и для вычисленных в предыдущем параграфе элементов фриза. Вскоре мы докажем это утверждение, но сначала установим еще некоторые свойства континуант. Начнем с рекуррентного соотношения.

**Предложение 2.4.** *Континуанты удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = a_n V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) - V_{n-2}(a_1, \dots, a_{n-2}) \quad (2.1)$$

с начальными условиями  $V_0 = 1$ ,  $V_1 = a_1$ .

**Доказательство.** Возьмем какой-нибудь код Морзе на  $n$  вершинах. Посмотрим на его последнюю вершину. Возможны два варианта. Либо ей отвечает точка, и тогда такая конфигурация  $M$  соответствует коду Морзе  $M'$  на вершинах  $1, \dots, n-1$ ; при этом  $w(M) = a_n w(M')$ , поскольку в коде  $M$  последняя вершина учитывается, а в конфигурации  $M'$  нет. Либо же, напротив, последняя вершина соединена с предпоследней при помощи тире; в таком случае выкинем эти две вершины и обозначим полученный код Морзе на вершинах  $1, \dots, n-2$  через  $M''$ . Тогда веса кодов  $M$  и  $M''$  будут отличаться знаком:  $w(M) = -w(M'')$ .

Стало быть, все коды, начинающиеся с точки, дадут в континуанту  $V_n(a_1, \dots, a_n)$  вклад, равный  $a_n V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$ , а все начинающиеся с тире — вклад, равный  $-V_{n-2}(a_1, \dots, a_{n-2})$ . Это и дает нам искомое соотношение (2.1).  $\square$

Дальнейшие свойства континуант мы оставим в качестве упражнения для читателя.

**Упражнение 2.5.** Докажите следующие равенства:

- (1)  $V_n(a_1, \dots, a_n) = V_n(a_n, \dots, a_1)$ ;
- (2)  $V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = -V_{n-2}(a_1, \dots, a_{n-2})$ ;
- (3)  $V_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - V_{n-2}(a_3, \dots, a_n)$ .

### § 2.3. Соотношение унимодулярности для континуант

**Теорема 2.6.** *Для любых  $a_1, \dots, a_{n+1}$  имеет место соотношение*

$$V_n(a_1, \dots, a_n) V_n(a_2, \dots, a_{n+1}) = V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) V_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) + 1. \quad (2.2)$$

Мы приведем два доказательства этой теоремы — алгебраическое и комбинаторное.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать эту теорему индукцией по  $n$ . База, при  $n = 1$ , очевидна.

Запишем требуемое соотношение для  $n$  и перепишем все члены, в которые входит  $a_{n+1}$ , с помощью соотношения (2.1):

$$\begin{aligned} V_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) &= a_{n+1}V_n(a_1, \dots, a_n) - V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}); \\ V_n(a_2, \dots, a_{n+1}) &= a_{n+1}V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

Тогда равенство перепишется в виде

$$\begin{aligned} V_n(a_1, \dots, a_n)(a_{n+1}V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1})) = \\ = V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)(a_{n+1}V_n(a_1, \dots, a_n) - V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})) + 1. \end{aligned}$$

В левой и правой части равенства встречается слагаемое

$$a_{n+1}V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)V_n(a_1, \dots, a_n);$$

взаимоуничтожив их, получим равенство

$$-V_n(a_1, \dots, a_n)V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) = -V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) + 1,$$

которое имеет место по предположению индукции. Теорема доказана.  $\square$

КОМБИНАТОРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим каждую из континуант в левой части равенства (2.2) как сумму мономов, отвечающих кодам Морзе на множествах  $\{1, \dots, n\}$  и  $\{2, \dots, n + 1\}$  соответственно. Будем изображать эти коды Морзе на одном рисунке, только относящиеся к первому коду тире будем изображать пунктиром, а ко второму — сплошной линией, как показано на рисунке ниже. Поэтому пунктирные тире могут стоять на всех возможных местах, кроме последнего, а сплошные — на всех, кроме первого. Таким образом, левая часть равенства (2.2) равна сумме мономов, полученных по всевозможным парам кодов Морзе с такими условиями.

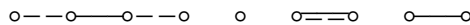


Рис. 2.1. Пара кодов Морзе

Сделаем то же самое для произведения континуант в правой части равенства (2.2): каждое произведение мономов из  $V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)$  и  $V_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1})$  можно интерпретировать как пару кодов Морзе на множестве  $\{1, \dots, n + 1\}$  — причем первый код (пунктирный) не может иметь тире на первой и последней позициях, а на второй (сплошной) никаких ограничений не накладывается.



Рассмотрим какую-либо конфигурацию  $(M_1, M_2)$ , где  $M_1$  и  $M_2$  — коды Морзе на  $\{1, \dots, n\}$  и  $\{2, \dots, n + 1\}$  соответственно. Ей отвечает моноом  $w(M_1)w(M_2)$  из левой части равенства (2.2). Построим по ней новую конфигурацию  $(M'_1, M'_2)$ , в которой  $M'_1$  будет кодом Морзе на  $\{1, \dots, n + 1\}$ , а  $M'_2$  — кодом на  $\{2, \dots, n\}$ .

Если между 1 и 2 в коде  $M_1$  нет (пунктирного) тире, то  $M_1$  можно рассматривать как код на вершинах  $2, \dots, n$ . В то же время код из сплошных тире  $M_2$  можно рассматривать как код на вершинах  $1, \dots, n + 1$ , у которого на первом месте нет тире. В таком случае положим  $(M'_1, M'_2) = (M_2, M_1)$ .

Пусть теперь вершины 1 и 2 соединены входящим в код  $M_1$  пунктирным тире. Поскольку в код  $M_2$  входят вершины, начинающиеся со 2-й, то между вершинами 1 и 2 нет сплошного тире. Построим по паре кодов  $(M_1, M_2)$  пару кодов  $(M'_1, M'_2)$  следующим образом: рассмотрим путь, выходящий из 1-й вершины и состоящий из пунктирных и сплошных тире. Ясно, что они могут только чередоваться. Заменим в нем каждое пунктирное тире на сплошное, а сплошное на пунктирное. Мы получим новую пару кодов  $(M'_1, M'_2)$ , у которой на первом месте стоит сплошное тире и нет пунктирного. Эта пара будет иметь тот же вес, что и  $(M_1, M_2)$ .

На рис. 2.2 показана пара кодов, которые получаются такой операцией из изображенных на рис. 2.1.



Рис. 2.2. Результат применения инволюции к паре кодов Морзе

При этом пара  $(M'_1, M'_2)$  будет «почти всегда» отвечать моноому из правой части. Далее, эту процедуру «почти всегда» можно обратить: по «почти» каждой паре кодов  $(M'_1, M'_2)$  можно единственным образом восстановить ту пару  $(M_1, M_2)$ , по которой она построена, причем веса этих пар будут равны.

Осталось разобраться с тем, что значат слова «почти всегда». Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного числа вершин.

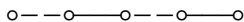
Пусть число вершин (т. е.  $n + 1$ ) четно. Тогда у каждой конфигурации  $(M_1, M_2)$  будет единственный образ — и найдется ровно одна конфигурация из правой части, у которой не будет прообраза:



В ней все вершины будут соединены чередующимися сплошными и пунктирными тире, причем и первое, и последнее тире будут сплошными (число вершин четно, значит, число тире между ними нечетно),

а вес этой конфигурации будет равен  $-1$ . Поэтому в произведении из правой части равенства (2.2) будет одно слагаемое, равное  $-1$ , которого нет в произведении в левой части.

Если же, напротив, число вершин нечетно, то у каждой конфигурации  $(M'_1, M'_2)$  будет единственный прообраз — и найдется ровно одна конфигурация из левой части, у которой не будет образа:



Ее вес будет равен 1. Поэтому в произведении из левой части равенства (2.2) будет одно слагаемое, равное 1, которого нет в произведении в правой части. □

### § 2.4. Целочисленность фризоз

Из теоремы 2.6 немедленно получается следующий результат.

**ТЕОРЕМА 2.7.** *Элемент  $(n + 1)$ -й строки фриза  $a_{1n}$ , над которым во второй строке стоят элементы  $a_1, \dots, a_n$ , равняется континуанте  $V_n(a_1, \dots, a_n)$ .*

Эта теорема объясняет отмеченный нами выше «феномен целочисленности»: все элементы фриза с целочисленной второй строкой  $(a_1, a_2, \dots)$  оказываются целыми числами, хотя чтобы их вычислить, приходится совершать деление.

**СЛЕДСТВИЕ 2.8.** *Фриз, элементы второй строки которого являются целыми положительными числами, является целочисленным.*

Действительно, континуанта — это многочлен от  $(a_1, a_2, \dots)$  с целыми коэффициентами.

### § 2.5. Тожество Эйлера

Теорема 2.6 допускает обобщение, известное как *тождество Эйлера*<sup>1</sup> для континуант.

**ТЕОРЕМА 2.9.** *Для любых  $m, l, n$  имеет место равенство*

$$V_{m+n}(a_1, \dots, a_{m+n})V_l(a_{m+1}, \dots, a_{m+l}) - V_{m+l}(a_1, \dots, a_{m+l})V_n(a_{m+1}, \dots, a_{m+n}) + V_{m-1}(a_1, \dots, a_{m-1})V_{n-l-1}(a_{m+l+2}, \dots, a_{m+n}) = 0.$$

При  $m = 1$  и  $n = l - 1$  это в точности соотношение унимодулярности для континуант.

---

<sup>1</sup>Леонард Эйлер (Leonhard Euler, 1707—1783) — швейцарский, прусский и российский математик. Автор более 800 работ по самым различным областям математики, механики, физики, астрономии и других наук. Считается одним из величайших математиков в истории.

Мы не будем использовать тождество Эйлера в дальнейшем и приведем его здесь без доказательства. Оно может быть доказано с использованием двойной индукции по двум из трех входящих в него параметров (это оставляется читателю в качестве необязательного упражнения). Короткое и элегантное доказательство этого тождества, принадлежащее А. В. Устинову, можно прочесть в его работе [14].

В оставшейся части этой главы рассказывается о связи континуант с определителями и объясняются некоторые альтернативные способы получения результатов, о которых шла речь выше. Читатель может пропустить эту часть без ущерба для понимания всего остального текста.

## § 2.6. Детерминантное выражение для континуант

Континуанта порядка  $n$  выражается как определитель трехдиагональной матрицы того же порядка.

Предложение 2.10. *Имеет место равенство*

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

Доказательство. Докажем это равенство по индукции. База при  $n = 0$  и  $n = 1$  очевидна. А разложив определитель из правой части (2.3) по последней строке, мы получим в точности рекуррентное соотношение (2.1).  $\square$

Из этого представления для континуант также можно получить условие унимодулярности. Для этого нам потребуется матричное тождество, известное как *тождество Льюиса Кэрролла*<sup>1</sup>.

Пусть  $A = (a_{ij})$  — произвольная матрица порядка  $n$ . Обозначим через  $M$  ее определитель, а через  $M_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$  — ее минор порядка  $n - k$ , полученный вычеркиванием из  $A$  строк с номерами  $i_1, \dots, i_k$  и столбцов с номерами  $j_1, \dots, j_k$ . Тожде-

<sup>1</sup>Льюис Кэрролл (Lewis Carroll, настоящее имя Charles Lutwidge Dodgson, 1832—1898) — английский математик, писатель и фотограф, автор книг «Алиса в Стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье». Упомянутое тождество использовалось в его работе 1865 г., однако было получено раньше, в работах Денано и Якоби.

Упомянутый Пьер Денанот (Pierre Desnanot, 1777—1857) — французский школьный учитель и инспектор. Автор школьных учебников по арифметике, а также работ о применении математики к задачам механики. Возглавлял учебный округ Клермон-Феррана.

ство Льюиса Кэрролла устанавливает связь между  $M$  и минорами порядка  $n - 1$  и  $n - 2$ :

ТЕОРЕМА 2.11 (тождество ЛЬЮИСА КЭРРОЛЛА). *Имеет место равенство*

$$M \cdot M_{1n}^{1n} = M_1^1 \cdot M_n^n - M_n^1 \cdot M_1^n. \quad (2.4)$$

Мы не будем приводить здесь доказательства этого тождества; читатель может придумать его самостоятельно или найти в литературе. Отметим комбинаторное доказательство Д. Зейльбергера<sup>1</sup> [15]; оно идейно близко приведенному выше доказательству теоремы 2.6. Оно также воспроизведено в брошюре [5].

### § 2.7. Вычисление континуанты

Вычислим определитель  $M = V_n(a_1, \dots, a_n)$  с помощью тождества (2.4). Замечательное свойство континуанты состоит в том, что участвующие в этом тождестве миноры будут либо континуантами меньшего порядка, либо единицами:

$$M_1^1 = V_{n-1}(a_2, \dots, a_n); \quad M_n^n = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}); \quad M_{1n}^{1n} = V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1});$$

наконец,  $M_1^n$  и  $M_n^1$  равны 1 как верхне- и нижнетреугольная матрицы с единицами на диагонали соответственно. Поэтому тождество (2.4) переписывается в виде:

$$V_n(a_1, \dots, a_n) \cdot V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - 1.$$

Иначе говоря,

$$\begin{aligned} 1 &= V_n(a_1, \dots, a_n) \cdot V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) - V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) = \\ &= \begin{vmatrix} V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) & V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) \\ V_n(a_1, \dots, a_n) & V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Это и есть условие унимодулярности. Мы получили еще одно доказательство теоремы 2.6.

---

<sup>1</sup>Дорон Зейльбергер (Doron Zeilberger, р. 1950) — израильско-американский математик, специалист в области комбинаторики и теории гипергеометрических рядов. В 1995 г. доказал знаменитую гипотезу Миллса, Роббинса и Рамси о знакопередающихся матрицах. Написал ряд статей «в соавторстве» с Шалosh Б. Эхад (Shalosh B. Ekhad) — своим компьютером.

## Глава 3. Соотношения между элементами фриза

### § 3.1. Соотношения между второй строкой и диагональю

Продолжим рассматривать фриз вида

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\ \dots & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \dots \\ \dots & & & a_{12} & & a_{23} & & a_{34} & & & \dots \\ \dots & & & & a_{13} & & a_{24} & & & & \dots \\ \dots & & & & & a_{14} & & & & & \dots \\ \dots & & & & & & a_{15} & & & & \dots \end{array}$$

Установим соотношения между элементами его второй строки  $a_1, a_2, \dots$  и элементами диагонали  $1, a_1, a_{12}, a_{13}, \dots$  (далее будем называть эту диагональ первой). Мы уже знаем соотношение, выражающее  $a_{1k}$  через  $a_1, \dots, a_k$ : это континуанта. Но для континуант выполнено рекуррентное соотношение, приведенное в предложении 2.4. Оно позволяет последовательно находить элементы диагонали фриза, если известна его вторая строка.

**ТЕОРЕМА 3.1.** *Положим  $a_{10} = 1, a_{11} = a_1$ . Тогда при  $k \geq 2$  элементы первой диагонали и второй строки фриза удовлетворяют соотношению*

$$a_{1k} = a_k a_{1,k-1} - a_{1,k-2}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.** Иногда говорят, что первая диагональ фриза  $a_1, a_{12}, a_{13}, \dots$  является решением разностного уравнения Штурма—Лиувилля:

$$V_k = a_k V_{k-1} - V_{k-2},$$

где  $a_1, a_2, \dots$  — коэффициенты,  $V_1, V_2, \dots$  — неизвестные.

Далее, предыдущую теорему можно переформулировать в следующем виде, который позволяет выражать элементы второй строки фриза через элементы его первой диагонали.

**ТЕОРЕМА 3.3.** *При  $k \geq 2$  имеют место равенства*

$$a_k = \frac{a_{1,k-2} + a_{1k}}{a_{1,k-1}}.$$

Обратите внимание, что в этом параграфе мы нигде не использовали конечность фриза, т. е. наличие у него нижней строки из единиц. Так что все сказанное будет верно и для бесконечных «фризов» (см. § 1.1) с произвольной второй строкой.

### § 3.2. Симметрии конечного фриза

Теперь предположим, что наш фриз оказался *конечным*: нашлось такое  $n$ , что при всех  $i$  выполнены равенства  $a_{i,n+i-2} = 1$  и  $a_{i,n+i-1} = 0$ . Иначе говоря,  $(n - 1)$ -я строка фриза состоит из одних единиц, а  $n$ -я — из одних нулей. Запишем в таком случае теорему 3.1 для элемента  $a_{1n} = 0$ :

$$0 = a_{1n} = a_n a_{1,n-1} - a_{1,n-2} = a_n - a_{1,n-2}$$

(напомним, что  $a_{1,n-1} = 1$ , поскольку  $(n - 1)$ -я строка состоит из одних единиц), откуда

$$a_{1,n-2} = a_n.$$

Но то же самое соотношение имеет место для любой диагонали, не только для первой. Получается набор равенств

$$a_{k,n-3+k} = a_{n+k-1}.$$

Стало быть, вторая строка фриза совпадает с предпоследней, сдвинутой вправо на  $n/2$  позиций. Сам фриз в таком случае имеет вид

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\
 \dots & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \dots & & a_{n-1} & & a_n & \dots \\
 \dots & & & a_{12} & & \dots & & & & & & \dots & & & & \dots \\
 \dots & & & & a_{13} & & \dots & & & & & \dots & & & & \dots \\
 \dots & & & & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & & & \dots \\
 \dots & & & & & & a_n & & a_{n+1} & & a_{n+2} & & & & & \dots \\
 \dots & & & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & & & \dots
 \end{array} \tag{3.1}$$

Отсюда получается следующий результат.

**ТЕОРЕМА 3.4.** *Фриз из  $n - 1$  строки обладает скользящей симметрией: его  $k$ -я строка, сдвинутая на  $n/2$  позиций, совпадает с  $(n - k)$ -й строкой.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из условия унимодулярности получается, что фриз можно строить не от второй строки вниз, а от предпоследней — вверх, и результат будет тем же.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 3.5.** *Фриз из  $n - 1$  строки периодичен с периодом  $n$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сдвиг фриза на  $n$  является результатом применения двух скользящих симметрий со сдвигом на  $n/2$ .  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6.** Говорят, что фриз имеет *порядок  $n$* , если он состоит из  $n - 1$  строки.

В силу следствия 3.5 фриз порядка  $n$  периодичен с периодом  $n$ , однако этот период не обязан быть минимальным (см. замечание 1.1 на с. 9).

**УПРАЖНЕНИЕ 3.7.** Каким тождествам на континуанты эквивалентна симметричность фриза?

### § 3.3. Бесконечное продолжение конечного фриза

По определению, фриз порядка  $n$  завершается строкой из единиц и строкой из нулей. То есть для элементов его (скажем, первой) диагонали выполнены равенства

$$a_{1,n-1} = 1, \quad a_{1n} = 0.$$

Но что будет, если продолжить эту последовательность дальше? Используя равенство из теоремы 3.1, можно определить  $a_{1i}$  при  $i > n$ :

$$a_{1,n+1} = a_n a_{1n} - a_{1,n-1} = a_n \cdot 0 - 1 = -1.$$

Далее,

$$a_{1,n+2} = a_{n+1} a_{1,n+1} - a_{1n} = -a_{n+1} = -a_1$$

(мы воспользовались периодичностью второй строки с периодом  $n$ ). Мы получили, что  $(n+1)$ -й и  $(n+2)$ -й элемент диагонали будут отличаться от первого и второго лишь знаком! Легко видеть, что так будет и дальше:  $a_{1,n+k} = -a_{1k}$  при  $k \leq n$ . Получается, что диагональ фриза можно продолжить вниз и следующие  $n$  ее элементов будут отличаться от первых  $n$  умножением на  $-1$ . Это же, разумеется, верно и для любой другой диагонали. Аналогично можно сказать, что для произвольного  $k$

$$a_{i,rn+k} = (-1)^r a_{ik},$$

где  $r$  целое.

Тем самым мы можем продолжить фриз ниже, после строки из нулей. Ясно, что продолжение будет удовлетворять правилу унимодулярности.

### § 3.4. Переход к соседней диагонали

Выясним, как связаны между собой элементы трех соседних диагоналей фриза. Оказывается, что, зная две из них, можно восстановить третью с помощью простого матричного преобразования.

Как и раньше, мы будем рассматривать фриз

$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\
 \dots & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \dots \\
 \dots & & & a_{12} & & a_{23} & & a_{34} & & \dots \\
 \dots & & & & a_{13} & & a_{24} & & a_{35} & & \dots \\
 \dots & & & & & a_{14} & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & & & & & & & a_{1,n-2} & & a_{2,n-1} & & a_{3n} & \dots \\
 \dots & & & & & & & & 1 & & 1 & & 1 & \dots
 \end{array}$$

Чтобы упростить обозначения, положим  $a_{kk} := a_k$ .

ТЕОРЕМА 3.8. Для любого  $k$  имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2k} \\ a_{3k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \end{pmatrix}.$$

Неформально говоря, применение такой матрицы сдвигает диагональ фриза, идущую с юго-запада на северо-восток, на одну позицию вниз по направлению этой диагонали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это равенство индукцией по  $k$ . В качестве базы возьмем  $k = 2$ :

$$\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - 1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в качестве базы можно было также взять  $k = 1$ , считая, что фриз сверху дополнен нулями; это дало бы верное равенство

$$\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Индуктивный переход. Запишем рекуррентные соотношения на элементы диагоналей:

$$a_{1,k+1} = a_{k+1} a_{1k} - a_{1,k-1},$$

$$a_{2,k+1} = a_{k+1} a_{2k} - a_{2,k-1},$$

$$a_{3,k+1} = a_{k+1} a_{3k} - a_{3,k-1}.$$

Обратите внимание, что во все равенства входит один и тот же коэффициент  $a_{k+1}$ .

Далее, предположение индукции утверждает, что

$$a_{1k} = a_1 a_{2k} - a_{3k},$$

$$a_{1,k-1} = a_1 a_{2,k-1} - a_{3,k-1}.$$

Отсюда и получается, что

$$a_{1,k+1} = a_1 a_{2,k+1} - a_{3,k+1},$$

что и требовалось. □

УПРАЖНЕНИЕ 3.9. Выведите эти равенства из предложения 2.10, разложив определитель для континуанты по первой строке.

Здесь мы пользовались только рекуррентными соотношениями на элементы диагоналей, так что эти матричные равенства будут верны и для элементов фриза, продолженного вниз в соответствии с правилом из § 3.3. Отсюда получается следствие, которое пригодится нам в дальнейшем при изучении связи фризмов и цепных дробей.



Пусть  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  — единичная матрица размера  $2 \times 2$ .

**СЛЕДСТВИЕ 3.10.** Пусть  $(a_1, \dots, a_n)$  — вторая строка фриза порядка  $n$ . Тогда имеет место матричное равенство

$$\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I.$$

**Доказательство.** Это следует из теоремы 3.8 и периодичности фриза. Действительно, сдвинув диагональ фриза на  $n$  позиций, мы получим ее же, только со знаком «минус» — значит, и композиция матриц в левой части равенства действует умножением на минус единицу.  $\square$

## Глава 4. Целочисленные фризы и триангуляции

### § 4.1. Сущность целочисленного фриза

В этой главе мы опишем все фризы, состоящие исключительно из целых элементов.

Будем называть *сущностью* (quiddity) фриза порядка  $n$  его вторую строку  $(a_1, \dots, a_n)$ . Очевидно, она не может содержать двух единиц подряд — это противоречило бы унимодулярности. Однако оказывается, что в этой строке обязательно есть хотя бы одна единица.

**Предложение 4.1.** *Вторая строка целочисленного фриза обязательно содержит 1.*

**Доказательство.** Предположим, что это не так и что найдется фриз, все элементы второй строки которого отличны от 1:  $a_k \geq 2$ . Рассмотрим его первую диагональ:  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$ . Согласно теореме 3.1, для ее элементов имеют место равенства

$$a_{1k} = a_k a_{1,k-1} - a_{1,k-2}.$$

Поскольку  $a_k \geq 2$ , отсюда получаются неравенства

$$a_{1k} \geq 2a_{1,k-1} - a_{1,k-2}.$$

Следовательно,

$$a_{1k} - a_{1,k-1} \geq a_{1,k-1} - a_{1,k-2} \geq \dots \geq a_1 - 1 \geq 1.$$

Значит, последовательность  $a_{1k}$  строго возрастающая. Это противоречит тому, что значение  $a_{1k}$  на пересечении диагонали и последней строки фриза равно 1.

Это же утверждение можно доказать и геометрически. Предположим, что мы нашли фриз, для которого все  $a_k \geq 2$ . Рассмотрим конус  $x \geq y \geq 0$ , порожденный векторами  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Матрица вида  $\begin{pmatrix} a_k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  переводит эти векторы в  $\begin{pmatrix} a_k \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a_k - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  соответственно. При  $a_k \geq 2$  оба эти вектора переходят внутрь конуса  $x \geq y \geq 0$ . Значит, и композиция таких матриц  $\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  переводит этот конус в некоторое его подмножество. Но это противоречит следствию 3.10, которое утверждает, что эта композиция равна  $-I$ .  $\square$

Следующая лемма позволит нам делать из данного целочисленного фриза порядка  $n$  новый фриз порядка  $n + 1$ .

ЛЕММА 4.2. Пусть  $(a_1, \dots, a_n)$  — сущность целочисленного фриза порядка  $n$ , и пусть  $1 \leq k \leq n$ . Тогда:

(1) набор  $(b_1, \dots, b_{n+1}) = (a_1, \dots, a_{k-1} + 1, 1, a_k + 1, a_{k+1}, \dots, a_n)$  является сущностью целочисленного фриза порядка  $n + 1$ ;

(2) если  $1, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$  — первая диагональ исходного фриза, идущая от элемента  $v_1 = a_1$ , то соответствующая диагональ нового фриза имеет вид

$$1, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k-1} + v_k, v_k, \dots, v_{n-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с доказательства пункта (2). Посмотрим, как будет устроена первая диагональ нового фриза: обозначим ее через  $1, w_1, \dots, w_{n-1}$ .

Ясно, что при  $i \leq k - 2$  диагонали этих двух фризсов совпадают:  $w_i = v_i$ . При этом на  $(k - 1)$ -м месте нового фриза будет стоять

$$w_{k-1} = (a_{k-1} + 1)v_{k-2} - v_{k-3} = v_{k-1} + v_{k-2}.$$

Далее,

$$w_k = w_{k-1} - w_{k-2} = v_{k-1} + v_{k-2} - v_{k-2} = v_{k-1}.$$

Следующий элемент диагонали будет равен

$$w_{k+1} = (a_k + 1)w_k - w_{k-1} = (a_k + 1)v_{k-1} - v_{k-1} - v_{k-2} = a_k v_{k-1} - v_{k-2} = v_k.$$

При всех  $j > k + 1$  будет иметь место равенство  $w_j = v_{j-1}$ . В частности,  $(n - 2)$ -й и  $(n - 1)$ -й члены этой последовательности будут равны 1 и 0 соответственно, то есть фриз оборвется, а диагональ будет содержать  $n$  положительных элементов. То же самое рассуждение применимо и к любой другой диагонали. Стало быть, в результате такой вставки получится целочисленный фриз на единицу большего порядка. Пункт (1) также доказан.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Эта конструкция очевидным образом является обратимой: если последовательность  $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$  — сущность целочисленного фриза, то и  $(\dots, b_{k-1} - 1, b_{k+1} - 1, \dots)$  будет сущностью фриза на единицу меньшего порядка (обратите внимание, что в силу отсутствия двух единиц подряд оба числа  $b_{k-1} - 1$  и  $b_{k+1} - 1$  положительны).

## § 4.2. Фризы и триангуляции

Рассмотрим выпуклый  $n$ -угольник с пронумерованными вершинами. Его *триангуляцией* будем называть его разбиение на треугольники с помощью диагоналей, не пересекающихся нигде, кроме вершин.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Число триангуляций выпуклого  $n$ -угольника называется  $(n - 2)$ -м числом Каталана (это одно из многочисленных

эквивалентных определений). Для чисел Каталана справедлива формула  $C(n) = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}$  (см., например, [4, § 3.3]).

Рассмотрим произвольную триангуляцию  $n$ -угольника. Ей можно сопоставить набор чисел  $(c_1, \dots, c_n)$ , где  $c_i$  — число треугольников, сходящихся в  $i$ -й вершине. Будем называть такой набор *сущностью триангуляции*. Триангуляция однозначно восстанавливается по своей сущности (почему?).

**ТЕОРЕМА 4.5** (Дж. Конвей, Д. Кокстер). *Набор чисел  $(c_1, \dots, c_n)$ , построенный по триангуляции  $n$ -угольника, является сущностью некоторого целочисленного фриза порядка  $n$ ; это отображение устанавливает биекцию между триангуляциями  $n$ -угольника и целочисленными фризами порядка  $n$ .*

**Доказательство.** Применим индукцию по  $n$ . База  $n = 3$  очевидна: имеется лишь одна триангуляция треугольника и единственный фриз порядка 3 с сущностью  $(1, 1, 1)$ . (Читатель, которого это не убеждает, может начать с  $n = 4$ .)

Рассмотрим некоторую триангуляцию  $n$ -угольника. Выберем в ней вершину, принадлежащую к единственному треугольнику. Такая существует в силу принципа Дирихле: если  $n$  внешних сторон принадлежат  $n - 2$  треугольникам триангуляции, то найдется хотя бы один треугольник (а на самом деле не менее двух), которому принадлежат две внешние стороны. Далее мы будем называть такой треугольник «ухом».

Пусть вершина, принадлежащая единственному треугольнику, имеет номер  $k$ , а в вершинах  $k - 1$  и  $k + 1$  сходятся  $b_{k-1}$  и  $b_{k+1}$  треугольников соответственно. Таким образом, сущность этой триангуляции имеет вид  $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$ . Выбросим треугольник, примыкающий к  $k$ -й вершине, из этой триангуляции, получим триангуляцию  $(n - 1)$ -угольника, сущность которой равна  $(\dots, b_{k-1} - 1, b_{k+1} - 1, \dots)$ . Эта триангуляция, по предположению индукции, определяет фриз с той же сущностью. Но по лемме 4.2 тогда и набор  $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$  определяет целочисленный фриз.

Биективность полученного соответствия следует из замечания 4.3: из сущности каждого фриза порядка  $n$  можно удалить единицу, сведя дело к фризу на единицу меньшего порядка.  $\square$

### § 4.3. Восстановление фриза по триангуляции

Наша ближайшая цель — описать комбинаторный смысл элементов фриза, получаемого по заданной триангуляции. Теорема Конвея—Кокстера утверждает, что каждый элемент второй строки фриза — это

количество треугольников, сходящихся при соответствующей вершине триангуляции. А как восстановить остальные элементы фриза?

Пусть дан целочисленный фриз, который мы будем обозначать в соответствии с представлением (3.1) со с. 22: его вторая строка равна  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , а через  $v_0 = 1, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$  обозначены элементы диагонали, проходящей через  $a_1$ , т. е.  $v_1 = a_1$ . Удобно также считать, что  $v_{-1} = 0$ .

Рассмотрим триангуляцию  $n$ -угольника, вершины которого пронумерованы числами от 1 до  $n$ , с сущностью  $(a_1, \dots, a_n)$ . По ней можно восстановить  $(v_0, v_1, v_2, \dots)$  посредством следующего алгоритма:

- напишем в вершинах  $n$  и 1 числа 0 и 1 соответственно;
- далее расставим числовые отметки во всех остальных вершинах многоугольника по такому правилу: для каждого треугольника, в двух вершинах которого уже стоят числа  $a$  и  $b$ , поставим в третьей его вершине число  $a + b$ . Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока все вершины не окажутся заполнены.

УПРАЖНЕНИЕ 4.6. Убедитесь, что во всех вершинах, соединенных с нулевой вершиной при помощи диагонали или стороны, будут написаны единицы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Полученная по этому алгоритму отметка в  $i$ -й вершине будет равна элементу  $v_{i-1}$  диагонали фриза.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данной триангуляции  $n$ -угольника сопоставим двойственный граф на  $n - 2$  вершинах: вершины его будут соответствовать треугольникам из триангуляции, причем две вершины будут соединены ребром, если у двух треугольников имеется общая сторона. Такой граф является деревом, валентности всех его вершин не превосходят трех, а висячие вершины отвечают «ушам» триангуляции.

Далее, запись чисел в вершинах треугольников в соответствии с нашим алгоритмом можно рассматривать как обход вершин дерева, отвечающего триангуляции: на первом шаге алгоритма мы берем треуголь-

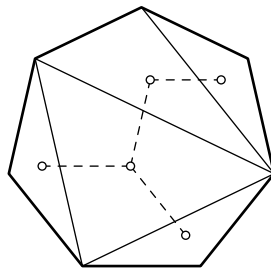


Рис. 4.1. Триангуляция и отвечающее ей дерево

ник, содержащий вершины  $n$  и  $1$ , и записываем число в его третьей вершине (для первого шага это число будет единицей). Сделав это, отметим отвечающую этому треугольнику вершину дерева как посещенную.

На каждом следующем шаге мы рассматриваем какую-то вершину, смежную с уже посещенными; ей отвечает треугольник, в двух вершинах которого уже стоят какие-то числа. Записав в третьей вершине треугольника их сумму, отметим как посещенную вершину дерева, которая отвечает этому треугольнику.

Докажем наше предложение индукцией по  $n$ . База при  $n = 3$  очевидна: мы получаем треугольник, в вершинах которого записаны  $0$ ,  $1$  и  $1$ . Он отвечает единственному фризю порядка  $3$ .

Индуктивный переход: пусть наше предложение доказано для всех возможных триангуляций  $n$ -угольника, а мы хотим доказать его для  $(n + 1)$ -угольника. Посмотрим на последний шаг алгоритма; в его ходе мы обязаны посетить какую-то висячую вершину дерева триангуляции, т. е. добавить к триангуляции  $n$ -угольника «ухо». Пусть данный  $n$ -угольник имеет сущность  $(a_1, \dots, a_n)$ , а «ухо» на последнем шаге «приклеивается» к стороне  $(k - 1, k)$ . По предположению индукции, построенный в результате выполнения алгоритма набор отметок в вершинах  $(v_0, \dots, v_{n-1})$  будет стоять на диагонали фриза с сущностью  $(a_1, \dots, a_n)$ . Далее, на последнем шаге между вершинами  $k - 1$  и  $k$  будет добавлена вершина с отметкой  $v_{k-1} + v_k$ . При этом триангуляция  $(n + 1)$ -угольника будет иметь сущность  $(\dots, a_{k-1} + 1, 1, a_k + 1, \dots)$  — что согласуется с результатом леммы 4.2 об элементах фриза. Предложение доказано.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 4.8. Рассмотрим триангуляцию  $n$ -угольника, для которой все внутренние стороны треугольников образуют зигзаг, как на рис. 4.2 (иными словами, все элементы сущности этой триангуляции

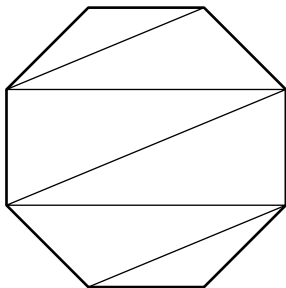


Рис. 4.2. Триангуляция при помощи зигзага

не превосходят 3). Докажите, что все элементы соответствующего фриза будут числами Фибоначчи.

УПРАЖНЕНИЕ 4.9. Рассмотрим триангуляцию, в которой имеется вершина, где сходятся не менее 4 треугольников. Докажите, что соответствующий фриз содержит число 4.

### § 4.4. Допустимые пути

Еще один способ вычисления элементов фриза, изложенный в работе [8], основан на подсчете числа так называемых допустимых путей. Как и прежде, рассмотрим триангуляцию  $n$ -угольника, вершины которого пронумерованы числами от 1 до  $n$  (против часовой стрелки). Будем считать, что вершины пронумерованы циклически, т. е. вершина  $n + 1$  совпадает с первой и т. д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10. *Допустимым путем* из вершины  $i - 1$  в вершину  $j + 1$  называется упорядоченная последовательность попарно различных треугольников  $\tau_i, \dots, \tau_j$ , где треугольник  $\tau_\ell$  инцидентен вершине  $\ell$ .

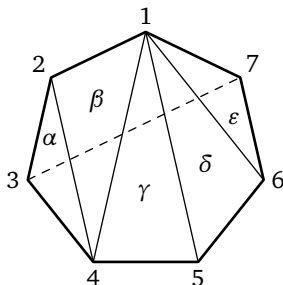
Иными словами, рассмотрим дугу (подмножество сторон  $n$ -угольника), идущую из  $(i - 1)$ -й вершины в  $(j + 1)$ -ю против часовой стрелки. Допустимый путь — это последовательность треугольников, инцидентных всем промежуточным вершинам этой дуги, по одному треугольнику на вершину.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.11. *Элемент фриза  $a_{ij}$  равен числу допустимых путей из  $i - 1$  в  $j + 1$ .*

Мы не будем доказывать это предложение; читатель может попробовать восстановить доказательство сам. Оно также имеется в работе [8].

Замечание 4.12. Отметим, что по определению путь из  $(i - 1)$ -й вершины в  $(i + 1)$ -ю состоит из *одного* треугольника, инцидентного  $i$ -й вершине. Тогда число допустимых путей между этими вершинами есть просто  $a_i$ . Далее, путь из  $(i - 1)$ -й вершины в  $i$ -ю единственен: он состоит из *нуля* треугольников, поэтому все элементы первой строки фриза равны 1.

Пример 4.13. Рассмотрим триангуляцию семиугольника, показанную на рисунке справа. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  — входящие в нее треугольники. Перечислим все допустимые пути из вершины 7 в вершину 3. Это будут пары треугольников  $(\tau_1, \tau_2)$ , первый из кото-



рых будет инцидентен вершине 1, а второй — вершине 2. Вот все такие пары:

$$(\varepsilon, \beta), (\varepsilon, \alpha), (\delta, \beta), (\delta, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \alpha), (\beta, \alpha).$$

Это дает значение  $a_{12} = 7$ . (Заметим, что в этом примере  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 2$ , что согласуется с тем, что  $a_{12} = a_1 a_2 - 1$ .)

УПРАЖНЕНИЕ 4.14 (нетривиальное). а) Покажите, что допустимый путь как последовательность однозначно восстанавливается по множеству треугольников.

б) Убедитесь, что дополнение к пути из вершины  $i$  в вершину  $j$  определяет путь из вершины  $j$  в вершину  $i$ . Скажем, если в вышеприведенном примере  $(\tau_1, \tau_2)$  — допустимый путь из 7 в 3, то дополнение  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\} \setminus \{\tau_1, \tau_2\}$  определяет допустимый путь из 3 в 7. Выведите отсюда еще одно доказательство скользящей симметрии фриза.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.15. Большинство результатов из этого раздела можно найти в двух работах Дж. Конвея и Д. Кокстера [9], [10]. Эти работы, опубликованные в двух последовательных номерах посвященного вопросам математического образования журнала «The Mathematical Gazette», по форме представляют собой привычный ученикам математических классов листок с задачами: в первой статье ряд утверждений о фризах сформулирован в виде последовательности из трех десятков задач, а во второй статье приводятся их решения или достаточно подробные указания.



## Глава 5. Цепные дроби

В следующих нескольких главах мы увидим, как континуанты, триангуляции многоугольников и фриззы возникают в связи с классической задачей о разложении числа в цепную (или, как еще говорят, непрерывную) дробь.

### § 5.1. Подходящие дроби

Пусть дана несократимая дробь  $\frac{p}{q}$ , большая единицы. Ее можно разложить в цепную дробь следующим образом: выделим целую часть, разделив  $p$  на  $q$  с остатком. Пусть  $a_1$  — неполное частное, а  $r$  — остаток; тогда

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r}{q}.$$

Дробь  $\frac{q}{r}$ , обратная к  $\frac{r}{q}$ , уже будет больше единицы — поэтому из нее можно также выделить целую часть, дробную часть обратить и так далее. На каждом шаге знаменатели дробей будут уменьшаться, поэтому процесс рано или поздно оборвется (очередная дробь окажется целым числом). Тем самым мы получим представление

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Для краткости обозначим правую часть через  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ .

Такое представление почти что однозначно; единственная его неоднозначность состоит в том, что последнее число можно представить либо как  $a_n$ , либо как  $(a_n - 1) + \frac{1}{1}$ . Условимся выбирать одно из этих представлений исходя из того правила, что в разложении рационального числа в цепную дробь всегда должно быть *четное* число компонент.

**Пример 5.1.** Разложение числа  $\frac{7}{5}$  в цепную дробь имеет вид

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = [1, 2, 1, 1].$$

Предположим, что нам дано разложение числа в цепную дробь:  $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_n]$ . Мы можем рассмотреть не все это разложение, а лишь

часть, образованную первыми  $i$  его членами:  $\frac{p_i}{q_i} = [a_1, \dots, a_i]$ . То, что получится, называется  $i$ -й подходящей дробью к  $\frac{p}{q}$ . Так, например, подходящими дробями к дроби  $\frac{7}{5}$  из предыдущего примера будут  $1$ ,  $\frac{3}{2}$  и  $\frac{4}{3}$ .

Отметим, что процедура разложения числа в цепную дробь — это в точности алгоритм Евклида, примененный к числителю и знаменателю изначальной дроби.

## § 5.2. Матрицы цепных дробей

Рассмотрим рациональное число, записанное несократимой дробью  $\frac{p}{q} > 1$ . Когда мы раскладываем его в цепную дробь, на каждом шаге мы выделяем из него целую часть (обозначим ее через  $a_1$ ) и обращаем дробную, тем самым получая новую несократимую дробь  $\frac{p'}{q'}$ . Посмотрим, как связаны между собой эти числа:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{p'/q'}; \quad \frac{p}{q} = \frac{a_1 p' + q'}{p'}$$

Отсюда мы можем записать равенства

$$\begin{aligned} p &= a_1 p' + q'; \\ q &= p'. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались несократимостью дробей  $\frac{p}{q}$  и  $\frac{p'}{q'}$ .

Стало быть, числа  $p$  и  $q$  получаются из  $p'$  и  $q'$  линейной заменой, матрицу которой нетрудно выписать:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}.$$

Далее ту же процедуру можно повторить, выделив целую часть  $a_2$  из дроби  $\frac{p'}{q'}$ ; мы получим новую дробь  $\frac{p''}{q''}$ , что даст нам равенство

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'' \\ q'' \end{pmatrix}.$$

Этот процесс завершится, когда очередная дробь  $\frac{p^{(n-1)}}{q^{(n-1)}}$  окажется целым числом  $a_n$ , что равносильно тому, что  $p^{(n-1)} = a_n$  и  $q^{(n-1)} = 1$ . Мы получим равенство

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Можно также «выделить дробную часть» из целого числа  $a_n$ , получив «дробь»  $\frac{p^{(n)}}{q^{(n)}} = \frac{1}{0}$ . Рационального числа  $\frac{1}{0}$ , конечно же, не бывает, однако на уровне матриц все будет хорошо:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

А что же будет, если применить то же произведение матриц не к вектору  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , а к другому базисному вектору,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ? Мы получим равенство

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы представили вектор с компонентами  $r$  и  $s$  как произведение матриц вида  $\begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , только для набора  $(a_1, \dots, a_{n-1})$ , а не для  $(a_1, \dots, a_n)$ . Отсюда следует, что  $\frac{r}{s}$  равняется *последней подходящей дроби*  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  к числу  $\frac{p}{q}$ :

$$\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_n]; \quad \frac{r}{s} = [a_1, \dots, a_{n-1}].$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.** Матрицей цепной дроби для числа  $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_n]$ ,  $\frac{p}{q} > 1$ , называется матрица

$$M^+(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили следующее предложение.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3.** Пусть  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  — матрица цепной дроби для числа  $\frac{p}{q}$ , а  $\frac{r}{s} = \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}$  — последняя подходящая дробь к  $\frac{p}{q}$ . Тогда

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}.$$

То же можно сказать и про любую пару соседних подходящих дробей, не обязательно последнюю.

**СЛЕДСТВИЕ 5.4.** Пусть  $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$  и  $\frac{p_i}{q_i}$  — соответственно  $(i-1)$ -я и  $i$ -я подходящие дроби к  $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_n]$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Из этого утверждения моментально получаются следующие свойства подходящих дробей.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5.** Числители и знаменатели подходящих дробей  $\frac{p_i}{q_i} = [a_1, \dots, a_i]$  к дроби  $\frac{P}{Q} = [a_1, \dots, a_n]$  удовлетворяют следующим равенствам:

$$(1) p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i;$$

(2)  $p_i$  и  $q_i$  взаимно просты;

(3) для  $p_i$  и  $q_i$  выполнены рекуррентные соотношения  $p_k = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$  и  $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$  с начальными условиями  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = a_1$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = 1$ ;

(4) последовательности числителей и знаменателей подходящих дробей возрастают:  $p_{i-1} < p_i$  и  $q_{i-1} < q_i$  для любого  $i$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (1) Заметим, что определитель матрицы вида  $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  равен  $-1$ . Следовательно,

$$\det \begin{pmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{pmatrix} = (-1)^i.$$

В частности, если считать количество компонент разложения четным, мы получаем равенство  $\det M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = 1$ .

(2) Это непосредственно следует из (1).

(3) Выделим в произведении в правой части равенства (5.1) последний сомножитель:

$$\begin{pmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При  $i = 1$  мы получаем равенство

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что дает нам начальные условия. При произвольном  $k$  равенство первых столбцов этих матриц в точности соответствует рекуррентным соотношениям.

Утверждение (4) следует из (3), поскольку все  $a_i$  строго положительны.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.6.** Разумеется, все перечисленные свойства подходящих дробей можно доказать и не прибегая к матричному языку. Читатель может проделать это самостоятельно или прочесть, например, в классической книге А. Я. Хинчина «Цепные дроби» [7]. Геометрическая интерпретация действия таких матриц на плоскости — это алгоритм «вытягивания носов», о котором написано в замечательной брошюре В. И. Арнольда [1]. Ее мы также горячо рекомендуем всем интересующимся.

### § 5.3. Снова континуанты

Мы видим, что соотношение (3) из предложения 5.5 очень похоже на рекуррентное соотношение для континуант (предложение 2.4): они отличаются только знаком. Поэтому можно определить *положительные континуанты* при помощи соотношения

$$\begin{aligned} K_0(\cdot) &= 1, & K_1(a_1) &= a_1, \\ K_i(a_1, \dots, a_i) &= a_i K_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) + K_{i-2}(a_1, \dots, a_{i-2}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 5.7.** Сформулируйте аналог определения 2.2 для положительных континуант и покажите, что оно эквивалентно соотношению (5.2). Сформулируйте и докажите для положительных континуант аналоги свойств из упражнения 2.5 и проинтерпретируйте (аналогично предложению 2.10) их в терминах разложения определителей по строке или столбцу.

Тогда предложение 5.5 (3) принимает следующий вид:

**Следствие 5.8.**  *$i$ -я подходящая дробь к дроби  $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_{2m}]$  равняется отношению континуант*

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{K_i(a_1, \dots, a_i)}{K_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1})},$$

причем дробь в правой части равенства несократима.

### § 5.4. Отрицательные цепные дроби

При определении цепной дроби мы брали целую часть числа с недостатком. А что будет, если выделять целую часть, но с избытком и потом применять ту же процедуру к разности между ней и исходным числом? У нас возникнет разложение числа в *отрицательную цепную дробь*; иногда ее также называют *цепной дробью Хирцебруха*<sup>1</sup>. Если будет нужно избежать путаницы, «обычную» цепную дробь мы будем называть *положительной цепной дробью*.

При этом все компоненты отрицательной цепной дроби для числа, большего 1, будут натуральными числами, не меньшими 2; такое разложение уже будет однозначным. Будем обозначать его двойными квадратными скобками:

$$\frac{p}{q} = c_1 - \frac{1}{c_2 - \frac{1}{c_3 - \frac{1}{\dots}}} = [[c_1, c_2, c_3, \dots]].$$

---

<sup>1</sup>Фридрих Хирцебрух (Friedrich Hirzebruch, 1927—2012) — немецкий математик, один из основателей Математического института Макса Планка в Бонне.

ПРИМЕР 5.9. Число  $\frac{7}{5}$  раскладывается в отрицательную цепную дробь так:

$$\frac{7}{5} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3}} = [[2, 2, 3]].$$

Для отрицательных цепных дробей так же определяются подходящие дроби, которые мы будем обозначать  $\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{q}_i}$ . Они получаются, если ограничиться в разложении в цепную дробь первыми  $i$  членами:  $\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{q}_i} = [[c_1, \dots, c_i]]$ . Например, для  $\frac{7}{5}$  подходящие дроби будут равны  $\frac{2}{1}$  и  $\frac{3}{2}$ .

Аналогично можно определить и матрицы цепных дробей. Пусть  $\frac{p}{q}$  — исходная дробь, а дробь  $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$  получается из нее вычитанием целой части с избытком, переменной знака и взятием обратного. Так, поскольку

$$\frac{p}{q} = c_1 - \frac{1}{\tilde{p}/\tilde{q}} = \frac{c_1\tilde{p} - \tilde{q}}{\tilde{p}},$$

то переход между предыдущей и следующей цепными дробями осуществляется так:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}.$$

Теперь можно дать определение матрицы отрицательной цепной дроби и доказать следующее предложение, аналогичное предложению 5.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.10. Матрицей отрицательной цепной дроби для числа  $\frac{p}{q} = [[c_1, \dots, c_k]]$ ,  $\frac{p}{q} > 1$ , называется матрица

$$M(c_1, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} c_k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. Одно из преимуществ работы с матрицами состоит в том, что матрицы  $M(c_1, \dots, c_k)$  оказываются более «универсальными», чем цепные дроби: они определены для любой последовательности коэффициентов, тогда как для цепных дробей это не так, поскольку некоторые знаменатели могут обращаться в нуль. В качестве примера рассмотрим следующую «цепную дробь»:

$$[[3, 1, 2, 1]] = 3 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{1}}}.$$

Она не соответствует никакому рациональному числу, тогда как матрица  $M(3, 1, 2, 1)$  оказывается определена (вычислите ее!).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.12.** Пусть  $M(c_1, \dots, c_k)$  — матрица цепной дроби для числа  $\frac{p}{q}$ , а  $\frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} = \frac{\tilde{p}_{k-1}}{\tilde{q}_{k-1}}$  — последняя подходящая дробь к  $\frac{p}{q}$ . Тогда

$$M(c_1, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} p & -\tilde{r} \\ q & -\tilde{s} \end{pmatrix}.$$

Отсюда немедленно получается выражение для матриц подходящих дробей.

**СЛЕДСТВИЕ 5.13.** Пусть  $\frac{\tilde{p}_{i-1}}{\tilde{q}_{i-1}}$  и  $\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{q}_i}$  — соответственно  $(i-1)$ -я и  $i$ -я отрицательные подходящие дроби к  $\frac{p}{q} = [[c_1, \dots, c_k]]$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_i & \tilde{p}_{i-1} \\ \tilde{q}_i & \tilde{q}_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Тем самым для отрицательных подходящих дробей имеется аналог предложения 5.5.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.14.** Числители и знаменатели отрицательных подходящих дробей  $\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{q}_i} = [[c_1, \dots, c_i]]$  к дроби  $\frac{p}{q} = [[c_1, \dots, c_k]]$  удовлетворяют следующим равенствам:

- (1)  $\tilde{p}_i \tilde{q}_{i-1} - \tilde{p}_{i-1} \tilde{q}_i = 1$ ;
- (2)  $\tilde{p}_i$  и  $\tilde{q}_i$  взаимно просты;
- (3) для  $\tilde{p}_i$  и  $\tilde{q}_i$  выполнены рекуррентные соотношения  $\tilde{p}_i = c_i \tilde{p}_{i-1} - \tilde{p}_{i-2}$  и  $\tilde{q}_i = c_i \tilde{q}_{i-1} - \tilde{q}_{i-2}$  с начальными условиями  $\tilde{p}_0 = 1$ ,  $\tilde{p}_1 = c_1$ ,  $\tilde{q}_0 = 0$ ,  $\tilde{q}_1 = 1$ ;
- (4) последовательности числителей и знаменателей отрицательных подходящих дробей возрастают:  $\tilde{p}_{i-1} < \tilde{p}_i$  и  $\tilde{q}_{i-1} < \tilde{q}_i$  для любого  $i$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Эти утверждения доказываются аналогично положительному случаю. Более того, здесь ситуация будет даже проще: матрицы вида  $\begin{pmatrix} c & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  всегда будут иметь определитель 1.

Единственное небольшое отличие состоит в доказательстве п. (4). Это утверждение опять-таки будет следовать из рекуррентного соотношения (3). Докажем его по индукции. База очевидна. Предположение: пусть мы знаем, что  $\tilde{p}_{i-1} > \tilde{p}_{i-2}$ . Запишем выражение для  $\tilde{p}_i$  и воспользуемся неравенством  $c_i \geq 2$ :

$$\tilde{p}_i = c_i \tilde{p}_{i-1} - \tilde{p}_{i-2} \geq 2\tilde{p}_{i-1} - \tilde{p}_{i-2} = \tilde{p}_{i-1} + (\tilde{p}_{i-1} - \tilde{p}_{i-2}) \geq \tilde{p}_{i-1},$$

что и требовалось. Аналогично доказывается неравенство для  $\tilde{q}_i$ .  $\square$

Здесь мы видим связь разложений в цепную дробь с фризами: числители и знаменатели подходящих дробей преобразуются ровно по тем

же рекуррентным правилам, что элементы фризоз. Например, они получаются как отношения континуант.

**Предложение 5.15.** Пусть  $\frac{p}{q} = [[c_1, \dots, c_k]]$  — разложение рационального числа в отрицательную цепную дробь. Тогда  $i$ -я подходящая дробь  $\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{q}_i} = [[c_1, \dots, c_i]]$  для  $\frac{p}{q}$  равняется отношению континуант

$$\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{q}_i} = \frac{V_i(c_1, \dots, c_i)}{V_{i-1}(c_1, \dots, c_{i-1})},$$

причем дробь в правой части несократима.

Это доказывается точно так же, как в случае положительных цепных дробей.

### § 5.5. Связь между матрицами разложений в положительную и отрицательную цепную дробь

Мы описали два способа раскладывать рациональное число  $\frac{p}{q}$  в цепную дробь: положительную  $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_{2m}]$  и отрицательную  $\frac{p}{q} = [[c_1, \dots, c_k]]$ . По каждому из этих разложений мы построили матрицу — соответственно  $M^+ = M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  и  $M = M(c_1, \dots, c_k)$ .

**Пример 5.16.** Выбрав  $\frac{p}{q} = \frac{7}{5}$ , мы получаем, что

$$M^+(1, 2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad M(2, 2, 3) = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Возникает вопрос: как эти матрицы связаны между собой? Эта связь оказывается очень простой: их первые столбцы будут одинаковы и равны разности между вторыми столбцами матриц  $M^+$  и  $M$ . На матричном языке это формулируется так.

**Предложение 5.17.** Пусть  $M^+$  и  $M$  — матрицы соответственно положительной и отрицательной цепной дроби для числа  $\frac{p}{q}$ . Тогда

$$M^+ = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** В силу предложения 5.3 имеем  $M^+ = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ , где  $\frac{r}{s}$  — последняя положительная подходящая дробь к  $\frac{p}{q}$ . Аналогично предложение 5.12 утверждает, что  $M = \begin{pmatrix} p & -\tilde{r} \\ q & -\tilde{s} \end{pmatrix}$ , где  $\frac{\tilde{r}}{\tilde{s}}$  — последняя отрицательная подходящая дробь. Тем самым первые столбцы матриц



$M^+$  и  $M$  равны, а требуемое равенство равносильно утверждению о том, что  $r + \tilde{r} = p$  и  $s + \tilde{s} = q$ .

Докажем эти равенства. Воспользуемся свойством унимодулярности для подходящих дробей. Мы знаем, что

$$\tilde{r}q - \tilde{s}p = 1.$$

С другой стороны,

$$rq - sp = -1.$$

Знак «минус» возникает, так как последняя подходящая дробь имеет нечетный номер — по нашему определению, количество компонент в разложении числа в положительную цепную дробь четно. Таким образом,

$$(r + \tilde{r})q - (s + \tilde{s})p = 0.$$

Но из неравенств на числители и знаменатели подходящих дробей мы знаем, что  $r < p$  и  $\tilde{r} < p$ , а также  $s < q$  и  $\tilde{s} < q$ . Значит,  $0 < r + \tilde{r} < 2p$  и  $0 < s + \tilde{s} < 2q$ . Следовательно,  $r + \tilde{r} = p$  и  $s + \tilde{s} = q$ , что и требовалось.  $\square$

## Глава 6. Матрицы цепных дробей и группа $SL_2(\mathbb{Z})$

### § 6.1. Связь между положительными и отрицательными цепными дробями

В предыдущем параграфе мы выяснили, как связаны между собой матрицы положительной и отрицательной цепной дроби. Эта глава посвящена ответу на другой вопрос: предположим, что дробь  $\frac{p}{q}$  имеет «положительное» разложение  $[a_1, \dots, a_{2m}]$  и «отрицательное»  $[[c_1, \dots, c_k]]$ . Как связаны между собой эти наборы чисел? Иначе говоря, как восстановить один из этих наборов, зная другой? Ясно, что проще всего по одному из разложений вычислить саму дробь, а потом разложить ее другим способом — но есть ли более прямая связь? Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

**ТЕОРЕМА 6.1.** Пусть рациональное число  $\frac{p}{q} > 1$  имеет разложения в положительную  $[a_1, \dots, a_{2m}]$  и отрицательную  $[[c_1, \dots, c_k]]$  цепную дробь соответственно. Тогда набор чисел  $(c_1, \dots, c_k)$  имеет вид

$$(a_1 + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_2 - 1}, a_3 + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_4 - 1}, \dots, a_{2m-1} + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{2m} - 1}).$$

Мы докажем эту теорему двумя способами. Первый способ, которому посвящена эта глава, будет использовать матричные вычисления. Второй, более геометрический, рассматривается в следующей главе брошюры; он связан с действием модулярной группы на плоскости Лобачевского.

### § 6.2. Группа $SL_2(\mathbb{Z})$ и ее порождающие

Прежде чем перейти к первому доказательству, введем некоторые обозначения. Напомним, что через  $SL_2(\mathbb{Z})$  обозначается группа целочисленных матриц размера  $2 \times 2$  с определителем 1. Мы видели, что матрицы цепных дробей  $M(c_1, \dots, c_k)$  и  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  принадлежат этой группе.

Обозначим через  $R$ ,  $L$  и  $S$  следующие элементы группы  $SL_2(\mathbb{Z})$ :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно доказать (попытайте сделать это самостоятельно или прочтите, например, в VII главе книги Ж.-П. Серра «Курс арифметики»), что эти три матрицы порождают группу  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Оказывается, хватает

и любых двух из них: каждая из этих трех матриц выражается через две другие.

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Покажите, что  $L = S^{-1}R^{-1}S$ . Найдите выражения для  $R$  через  $S$  и  $L$  и для  $S$  через  $R$  и  $L$ .

Элемент  $S$  имеет порядок 4 (т. е.  $S^4 = I$ ); напротив, порядок элементов  $R$  и  $L$  бесконечен. Действительно, степени элементов  $R$  и  $L$  легко вычислить явно: так,  $R^a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $L^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$  при любом  $a \in \mathbb{Z}$ .

Нетрудно выразить через эти образующие матрицы цепных дробей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Матрицы  $M(c_1, \dots, c_k)$  и  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  допускают следующие разложения:

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = R^{a_1} L^{a_2} R^{a_3} L^{a_4} \dots R^{a_{2m-1}} L^{a_{2m}} \quad (6.1)$$

и

$$M(c_1, \dots, c_k) = R^{c_1} S R^{c_2} S \dots R^{c_k} S. \quad (6.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$\begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R^{a_i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_{i+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L^{a_{i+1}}.$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R^{a_i} L^{a_{i+1}},$$

откуда и получается формула (6.1). Формула (6.2) еще проще: она следует из равенства

$$\begin{pmatrix} c_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R^{c_i} S. \quad \square$$

Отсюда получается следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Имеет место равенство

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = -M(a_1 + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_2 - 1}, a_3 + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_4 - 1}, \dots, a_{2m-1} + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{2m}}), \quad (6.3)$$

Отметим, что если бы мы уже доказали теорему 6.1, то равенство (6.3) можно было бы получить из предложения 5.17, которое утверждает, что  $M^+ = MR$ . Однако мы будем действовать по-другому: докажем равенство (6.3), а из него уже выведем теорему 6.1.

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 6.5. Имеют место равенства

$$R^a = -M(a + 1, 1, 1) \quad \text{и} \quad L^a = -M(1, \underbrace{2, \dots, 2}_a, 1, 1).$$

Доказательство. Первое равенство проверяется непосредственно.

Докажем второе равенство. Сперва заметим, что  $M(1, 1, 1) = -I$ ,

т. е.  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$ . Далее, нетрудно проверить непосредственно,

что  $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ . А значит,  $L^a$  получается из матрицы  $M(2)^a = M(2, \dots, 2)$  при помощи сопряжения той же матрицей, что и требовалось.  $\square$

Доказательство предложения 6.4. Поскольку  $M(1, 1, 1) = -I$ , из леммы 6.5 следует, что

$$R^{a_i} L^{a_{i+1}} = -M(a_i + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{i+1}}, 1, 1).$$

Тем самым предложение следует из соотношения (6.1) и простого равенства  $M(2, 1, 1, a + 1) = -M(a + 2)$  (проверка которого оставляется читателю в качестве упражнения). Предложение доказано.  $\square$

Наконец, заметим, что последние три числа в равенстве (6.3) — это  $(2, 1, 1)$ , поэтому от них можно избавиться с помощью равенства  $M(2, 1, 1) = -R$ . Тем самым мы получаем, что

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = M(a_1 + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_2-1}, a_3 + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_4-1}, \dots, a_{2m-1} + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{2m}-1})R. \quad (6.4)$$

Из этого равенства следует, что первые столбцы матриц  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  в левой части и  $M(a_1 + 1, \dots)$  в правой части равны. А значит, они отвечают разложению одного и того же числа. Это доказывает теорему 6.1.  $\square$

### § 6.3. Цепные дроби и триангуляции

Связь между коэффициентами разложения в положительную и отрицательную цепную дробь, описанная в теореме 6.1, на первый взгляд выглядит достаточно сложно. Но оказывается, что у нее есть естественная интерпретация в терминах триангуляций многоугольников. В этом параграфе мы приведем саму эту конструкцию, а в следующей главе опишем, как она связана с фризами и появлявшимися у нас раньше матрицами из  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

Возьмем произвольный набор целых положительных чисел, имеющий четную длину; обозначим его через  $(a_1, \dots, a_{2m})$ . Рассмотрим две горизонтальные параллельные прямые. Нарисуем триангуляцию мно-

гоугольника, все вершины которого будут лежать на этих прямых<sup>1</sup>; при этом в ней будут участвовать треугольники двух видов: направленные вершиной вверх (т. е. с двумя вершинами на нижней прямой и одной вершиной на верхней) и вершиной вниз. Начнем с того, что нарисуем отрезок с концами на этих прямых; пусть верхний его конец будет первой вершиной нашего многоугольника, а нижний — последней. Пририсуем к этому отрезку справа  $a_1$  треугольников, направленных вершиной вверх, с общей вершиной. Далее пририсуем к ним справа  $a_2$  треугольников, направленных вершиной вниз; их общая вершина будет совпадать с правой вершиной последнего из треугольников, нарисованных на предыдущем шаге. Затем дорисуем  $a_3$  треугольников вершиной вверх,  $a_4$  вершиной вниз и так далее; поскольку общее число таких групп равно  $2m$ , то есть четно, вершина последнего треугольника будет направлена вниз (см. рис. 6.1). Тем самым мы отметим  $a_2 + a_4 + \dots + a_{2m} + 1$  точек на верхней прямой и  $a_1 + a_3 + \dots + a_{2m-1} + 1$  на нижней.

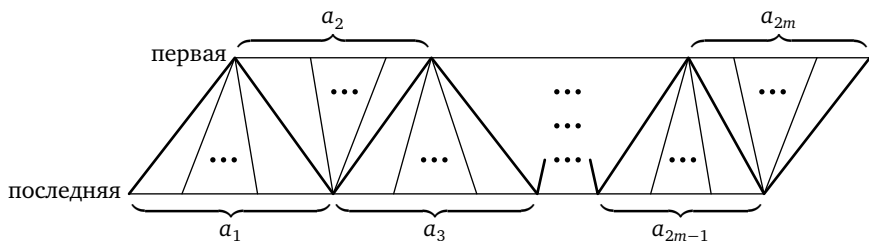


Рис. 6.1. Триангуляция, отвечающая набору  $(a_1, \dots, a_{2m})$

Пусть  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_{2m} + 2$ . Мы получили триангуляцию  $n$ -угольника, причем триангуляцию специального вида: у нее будет ровно два «уха», или, что то же самое, дерево этой триангуляции (см. доказательство предложения 4.7) не имеет тройных вершин — такое дерево называют «бамбуком».

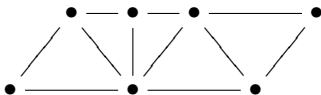
Обозначим через  $k$  количество треугольников, которые смотрят вниз — т. е.  $k = a_2 + a_4 + \dots + a_{2m}$ . Получается, что «уши» нашей триангуляции будут находиться в вершинах  $k + 1$  и  $n$ .

Несложно выписать сущность  $(c_1, \dots, c_n)$  такой триангуляции. Так,  $c_1 = a_1 + 1$ : в первой вершине сходятся  $a_1$  треугольников с вершиной

<sup>1</sup>Разумеется, такая фигура не будет многоугольником в смысле школьного курса планиметрии, где говорится, что смежные стороны многоугольника не лежат на одной прямой. Однако нас интересует триангуляция многоугольника как комбинаторный объект, так что мы этого не запрещаем. Любители строгости могут модифицировать нашу конструкцию, чтобы получить «настоящий» многоугольник — например, заменив прямые подходящими ломаными.

вверх и один направленный вершиной вниз; будем говорить, что *сущность* первой вершины равна  $c_1$ . Далее следует  $a_2 - 1$  двоек: в вершине, заключенной между двумя треугольниками, направленными вниз, сходятся два треугольника. Сущность следующей вершины равна  $a_3 + 2$  — в ней сходятся два треугольника, направленных вниз, и  $a_3$  направленных вверх, и так далее вплоть до  $(k + 1)$ -й вершины, сущность которой равна 1. Далее мы следуем в обратном порядке:  $c_{k+2} = a_{2m} + 1$ , за ней следует  $a_{2m-1} - 1$  двойка, и так далее вплоть до  $c_n = 1$ .

ПРИМЕР 6.6. Набору  $(1, 2, 1, 1)$  отвечает следующая триангуляция семиугольника:



Ее сущность равна  $(2, 2, 3, 1, 2, 4, 1)$ .

Таким образом, выражение в теореме 6.1 есть набор сущностей вершин такой триангуляции, только не весь, а его «половина»: следует взять сущности вершин, заключенных между двумя «ушами». Следующее утверждение показывает, что такой набор сущностей однозначно определяет триангуляцию.

УПРАЖНЕНИЕ 6.7. Пусть дана триангуляция  $n$ -угольника с двумя «ушами», и ее сущность равна  $(c_1, \dots, c_n)$ , причем  $c_{k+1} = c_n = 1$ . Покажите, что, зная  $c_1, \dots, c_k$ , можно восстановить значения  $c_{k+2}, \dots, c_{n-1}$ , и наоборот.

Более того, по такой триангуляции оказывается возможным восстановить и саму цепную дробь, и все подходящие дроби — как положительные, так и отрицательные. Для этого определим на дробях операцию *суммы Фарей*<sup>1</sup>.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.8. Пусть  $\frac{p}{q}$  и  $\frac{r}{s}$  — две неотрицательные несократимые дроби. Их *суммой Фарей*, или *медиантой*, называется дробь

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}.$$

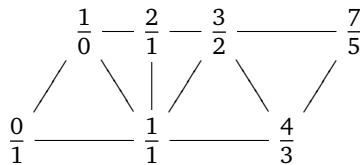
Таким образом, сумма Фарей — это результат «неправильного» сложения дробей: то, что получается, если складывать числитель с числителем, а знаменатель со знаменателем.

УПРАЖНЕНИЕ 6.9. Проверьте, что сумма Фарей двух дробей заключена между ними: если  $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ , то  $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$ .

<sup>1</sup>Джон Фарей-старший (John Farey Sr., 1766—1826) — английский геолог, ученый-универсал, автор статей по многочисленным темам: от садоводства и метеорологии до математики и музыки. Открыл последовательность Фарей в ходе исследований по математической теории музыки.

Кроме того, добавим к множеству неотрицательных рациональных чисел элемент  $\infty = \frac{1}{0}$ . Ясно, что такой элемент также можно прибавлять по Фарею к другим числам:  $\frac{p}{q} \oplus \infty = \frac{p+1}{q}$ .

Теперь опишем конструкцию, позволяющую вычислить по описанной выше триангуляции (то есть набору  $(a_1, \dots, a_{2m})$ ) цепную дробь. Поставим в самой левой нижней (последней) вершине триангуляции число  $0 = \frac{0}{1}$ , а в самой левой верхней (первой) — число  $\infty = \frac{1}{0}$ . Далее будем последовательно заполнять вершины триангуляции слева направо следующим образом: если в двух вершинах треугольника уже стоят дроби, то в третьей поставим их сумму Фарея. Так, в примере 6.6 у нас получится следующее:



**ТЕОРЕМА 6.10.** Пусть дана триангуляция  $n$ -угольника, построенная по набору  $(a_1, \dots, a_{2m})$ , и ее сущность равна  $(c_1, \dots, c_n)$ , причем  $c_k = c_n = 1$ . Если заполнить ее вершины дробями  $\frac{p_i}{q_i}$  по описанному выше правилу, то будет верно следующее.

$$(1) \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = [a_1, \dots, a_{2m}] = [[c_1, \dots, c_k]].$$

(2)  $\frac{p_i}{q_i} = [[c_1, \dots, c_{i-1}]]$ ; иначе говоря, на верхней стороне триангуляции стоят отрицательные подходящие дроби к  $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ .

(3) Рассмотрим зигзаг — путь, состоящий из отрезков с концами на верхней и нижней стороне, соединяющий левую нижнюю вершину с правой верхней, выделенный на рис. 6.1 толстой линией. Тогда последовательность положительных подходящих дробей расположена вдоль этого зигзага.

Мы докажем эту теорему в следующей главе. Для этого нам понадобится вложить триангуляцию в плоскость Лобачевского и изучить, как на ней действуют матрицы цепных дробей, которые мы рассматривали в § 6.2. Обратите внимание, что п. (1) теоремы — это по существу теорема 6.1, которую мы тем самым докажем другим способом.

**ПРИМЕР 6.11.** В примере 6.6 положительными подходящими дробями к  $\frac{7}{5}$  будут  $\frac{1}{1}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{4}{3}$  и  $\frac{7}{5}$ . Отрицательные подходящие дроби — это  $\frac{2}{1}$ ,  $\frac{3}{2}$  и  $\frac{7}{5}$ .

## Глава 7. Триангуляции и граф Фарей

Установим связь между фризами и группой  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ . Наше изложение близко следует статье [12], которую мы рекомендуем изучить заинтересованному читателю.

### § 7.1. Граф Фарей

Рассмотрим множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , каждое из которых мы представляем себе как несократимую дробь  $\frac{a}{b}$ , и добавим к нему элемент  $\frac{1}{0}$  («бесконечность»). Получим множество  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .

Определим *граф Фарей* как бесконечный граф, вершинами которого являются элементы  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Условимся, что две вершины  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  соединяются ребром тогда и только тогда, когда  $ad - bc = \pm 1$ . Это равносильно тому, что  $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \pm 1$ .

Если между такими вершинами есть ребро, то матрицы  $\begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} c & a+c \\ d & b+d \end{pmatrix}$  также имеют определитель  $\pm 1$  — а значит, обе вершины  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  также соединены с дробью  $\frac{a+c}{b+d}$ , т. е. с суммой Фарей этих дробей.

**УПРАЖНЕНИЕ 7.1.** Проверьте, что это полное описание всех треугольников в графе Фарей: всякий треугольник, т. е. тройка вершин, попарно соединенных ребрами, в графе Фарей имеет вид  $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}\right)$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 7.2.** Проверьте, что если  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  — несократимые дроби и  $ad - bc = 1$ , то и их медианта  $\frac{a+c}{b+d}$  тоже несократимая дробь.

Граф Фарей удобно рисовать на гиперболической плоскости. Мы будем использовать для этого модель в верхней полуплоскости; вкратце напомним основные понятия, связанные с ней.

Пусть  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$  — множество комплексных чисел с положительной мнимой частью. Будем называть его *гиперболической плоскостью*. Вещественную прямую, пополненную точкой  $\infty$ , будем называть *абсолютом*: ее можно воспринимать как множество «бесконечно удаленных точек» (или «асимптотических направлений») гиперболической плоскости. *Прямыми* на  $\mathbb{H}$  будем называть полуокружности с центром на абсолюте (т. е. перпендикулярные вещественной прямой) и вертикальные полупрямые с началом на абсолюте.

Поместим вершины графа Фарей на абсолюте и изобразим каждое ребро прямой (именно прямой, а не отрезком!) на  $\mathbb{H}$ . Как мы покажем



в следствии 7.9, нарисованный таким образом на верхней полуплоскости граф оказывается «планарен»: его ребра пересекаются только в вершинах.

Далее нас будет интересовать не весь граф Фарея, а лишь его подграф, вершинами которого являются неотрицательные рациональные числа, а также число  $\infty = \frac{1}{0}$ . Кроме того, мы изобразим гиперболическую плоскость в верхней полуплоскости несколько необычным образом: поместим точку  $\infty$  в конечную часть абсолюта, а на бесконечность уведем какое-нибудь отрицательное число. Например, для этого можно применить к стандартной модели в верхней полуплоскости преобразование  $z \mapsto \frac{z}{z+1}$ . Оно переведет 0 в 0, 1 в  $\frac{1}{2}$ , а бесконечность переведет в 1. Тем самым положительная полуось перейдет в интервал  $(0, 1)$  на вещественной оси, а полуплоскость  $\text{Re } z > 0$  перейдет во внутренность полукруга, диаметром которого является этот интервал. Далее, все ребра графа Фарея, соединяющие положительные точки абсолюта, будут изображаться как полуокружности, лежащие внутри этого полукруга. Подграф, образованный всеми положительными вершинами (а также 0 и  $\infty$ ) и соединяющими их ребрами, мы будем называть *положительным графом Фарея*. Некоторый его фрагмент изображен на рис. 7.1.

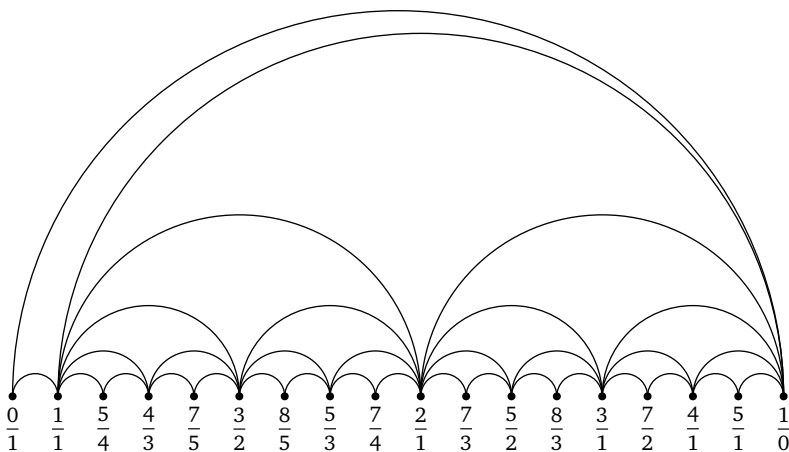


Рис. 7.1. Фрагмент положительного графа Фарея

Для полноты изложения отметим, что весь граф Фарея тоже можно красиво изобразить в конечной области, применив к нему преобразование  $z \mapsto i \frac{z-i}{z+i}$ . Оно переводит абсолют (вещественную прямую)

в единичную окружность, а верхнюю полуплоскость — в единичный диск. При этом  $\infty$  переходит в  $i$ ,  $0$  в  $-i$ , а точки  $-1$  и  $1$  остаются на местах. Наконец, перпендикулярные абсолюту дуги (обобщенных) окружностей переходят в перпендикулярные абсолюту дуги (обобщенных) окружностей; мы получаем картину, изображенную на рис. 7.2.

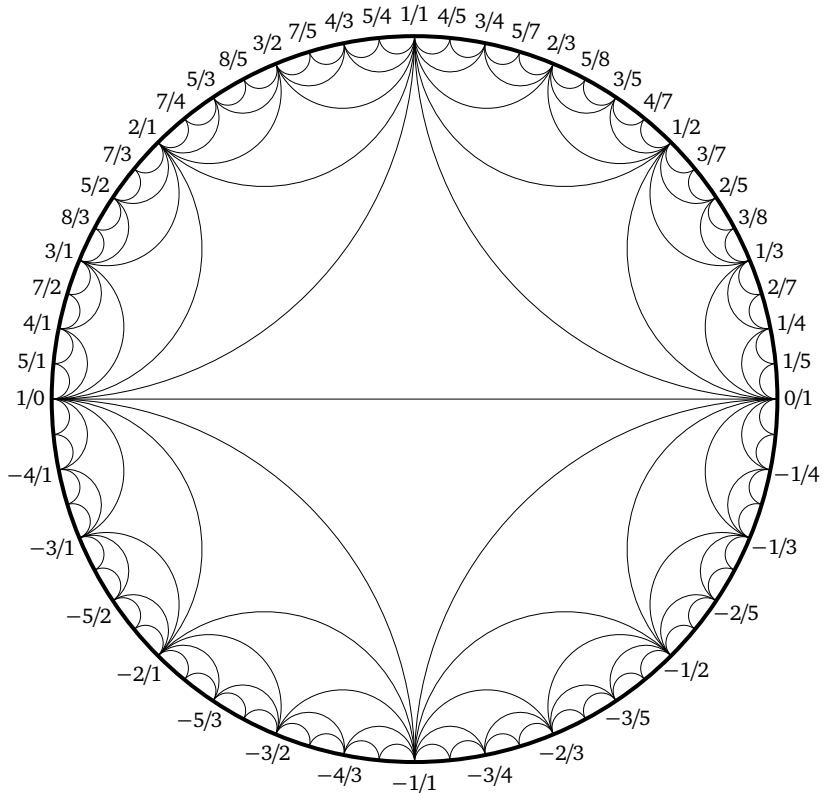


Рис. 7.2. Граф Фарея в круге

## § 7.2. Вложение триангуляции в положительный граф Фарея

В нарисованный таким образом на плоскости граф Фарея удобно вкладывать триангуляции многоугольников — при этом вершины многоугольника будут лежать на абсолюте. Рассмотрим какую-либо триангуляцию  $n$ -угольника и отметим у нее одну из сторон; будем считать, что эта сторона соединяет  $n$ -ю и первую вершины. Напишем в ее кон-

цах  $0 = \frac{0}{1}$  и  $\infty = \frac{1}{0}$ . Далее сопоставим каждой вершине положительное рациональное число по алгоритму, аналогичному описанному в § 4.3 и 6.3: для каждого треугольника, в двух вершинах которого уже стоят числа, запишем в третьей вершине их сумму по Фарею.

Теперь отметим все полученные  $n$  рациональных чисел на абсолютной гиперболической плоскости и проведем между ними всевозможные ребра графа Фарея; мы получим исходную триангуляцию.

Такой способ расстановки чисел в вершинах триангуляции уже появлялся в § 6.3 в частном случае триангуляций-«бамбуков»: при этом отмеченной стороной являлась левая сторона триангуляции.

**Пример 7.3.** Рассмотрим триангуляцию семиугольника, изображенную на с. 47. Ее вложение в граф Фарея показано на рис. 7.3.

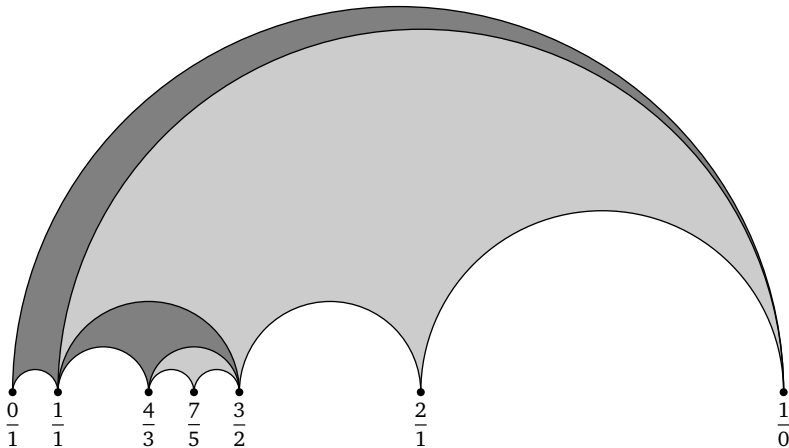


Рис. 7.3. Триангуляция, отвечающая дроби  $\frac{7}{5}$

**Предложение 7.4.** Пусть в вершинах триангуляции  $n$ -угольника, вложенного в граф Фарея, написаны несократимые дроби  $\frac{u_1}{v_1} = \frac{1}{0}, \frac{u_2}{v_2}, \dots, \frac{u_n}{v_n} = \frac{0}{1}$ . Тогда у фриза, отвечающего этой триангуляции, имеются соседние диагонали  $v_2, \dots, v_n$  и  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ .

**Доказательство.** Вычисляя суммы Фарея дробей, мы по существу дважды применяем алгоритм из § 4.3: отдельно к их числителям, отдельно к знаменателям. Поэтому последовательность числителей будет диагональю фриза, отвечающей начальным данным  $u_1 = 1, u_n = 0$ , а последовательность знаменателей будет отвечать начальным данным  $v_1 = 0, v_n = 1$ .  $\square$

ПРИМЕР 7.5. Триангуляции из предыдущего примера будут соответствовать диагонали фриза

...	0		0	...					
	...	1		1	...				
		...	1		4	...			
			...	3		7	...		
				...	5		3	...	
					...	2		2	...
						...	1		1
							...	0	
								0	...

Таким образом, числитель и знаменатель каждой из дробей, стоящих в вершинах, оказываются написанными вдоль антидиагонали. В частности, на антидиагоналях можно прочесть отрицательные подходящие дроби к  $\frac{7}{5}$ , а именно  $\frac{1}{1}$ ,  $\frac{4}{3}$  и собственно  $\frac{7}{5}$ .

### § 7.3. Действие группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Рассмотрим группу вещественных матриц размера  $2 \times 2$  с единичным определителем, которую обозначим через  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Эта группа действует на  $\mathbb{H}$  следующим образом: элемент  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  переводит точку  $z \in \mathbb{H}$  в точку  $\frac{az + b}{cz + d}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.6. Проверьте, что это и в самом деле действие, т. е. что верхняя полуплоскость переходит в себя, а произведению матриц отвечает композиция отображений.

Кроме того, в  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  есть нетривиальный элемент, действующий на  $\mathbb{H}$  тождественно: это матрица  $-I$ . Поэтому можно считать, что на  $\mathbb{H}$  действует факторгруппа  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$ , которую мы обозначим через  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Ее элементы можно воспринимать как матрицы размера  $2 \times 2$ , рассматриваемые с точностью до знака:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$  будут отвечать одному и тому же элементу в факторгруппе.

Наконец, мы рассмотрим не всю группу  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ , а только ее подгруппу  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , образованную всеми целочисленными матрицами из  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Очевидно, что она переводит рациональные точки абсолюта

в рациональные точки. Кроме того, она также сохраняет и граф Фарей: две точки  $\frac{p}{q}$  и  $\frac{r}{s}$  соединены ребром тогда и только тогда, когда определитель матрицы  $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$  равен  $\pm 1$ ; это значит, что для любой матрицы  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  у произведения  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$  такой же определитель — а это равносильно тому, что образы этих точек,  $\frac{ap + bq}{cp + dq}$  и  $\frac{ar + bs}{cr + ds}$ , также соединены ребром. Тем самым получается, что группа  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  сохраняет граф Фарей.

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.7.** На действие выше можно смотреть следующим образом: группа  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  естественно действует на  $\mathbb{C}^2$ . Сопоставив ненулевому вектору  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  его «наклон»  $z = \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (иными словами, рассмотрев действие  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  на прямых, проходящих через начало координат), мы и получаем описанное выше действие. В этих терминах абсолют соответствует сохраняемому  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  вещественному подмножеству  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ . При этом соединенной ребром паре вершин  $\frac{p}{q}$  и  $\frac{r}{s}$  из графа Фарей отвечает пара векторов  $(p, q)$  и  $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ , для которых  $\det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = 1$ . Конечно же, матрица  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  переводит такую пару векторов в такую же.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.8.** *Группа  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  точно транзитивно действует на ориентированных ребрах графа Фарей: любое ребро (с отмеченными началом и концом) можно перевести в любое, причем единственным преобразованием.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем, что пару  $(\infty, 0)$  можно перевести в пару  $(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})$ , где  $ps - qr = 1$ , дробно-линейным преобразованием с целыми коэффициентами. Действительно, это преобразование задается матрицей  $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ . Точность действия также очевидна: достаточно проверить, что стабилизатор пары  $(\infty, 0)$  тривиален, а он, как легко видеть, состоит из матриц  $\pm I$ .  $\square$

Отсюда нетрудно вывести уже заявленный выше результат о планарности графа Фарей.

**СЛЕДСТВИЕ 7.9.** *Ребра графа Фарей, вложенного в гиперболическую плоскость, не пересекаются.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу транзитивности действия достаточно доказать, что ребро, соединяющее 0 и  $\infty$ , не пересекается ни с каким другим ребром. Действительно, такое другое ребро должно было бы соединять положительную и отрицательную точки  $\frac{a}{b} > 0 > -\frac{c}{d}$  (здесь

$a, b, c, d$  — целые положительные числа). Но тогда определитель

$$ad - b(-c) = ad + cb \geq 2$$

не может быть равен 1. □

**Следствие 7.10.** Пусть на графе Фарея отмечены две триангуляции  $n$ -угольника с одинаковыми сущностями и с отмеченными соответственными сторонами. Тогда существует единственный элемент  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , совмещающий эти триангуляции и переводящий отмеченную сторону в отмеченную.

**Доказательство.** В силу предложения 7.8 существует единственный элемент  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , совмещающий отмеченные стороны — так, чтобы полуплоскость, содержащая первый многоугольник, переходила бы в полуплоскость, содержащую второй многоугольник. Далее все вершины триангуляции восстанавливаются однозначно при помощи обхода дерева триангуляции: третья вершина каждого из треугольников получается как сумма Фарея первых двух. □

### § 7.4. Порождающие элементы группы $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$

В § 6.2 мы видели, что любые две из следующих трех матриц

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

порождают группу  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Значит, их образы при факторизации по  $\pm I$  порождают  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ . Допуская некоторую вольность речи, мы будем использовать для элементов  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  те же обозначения, что и в группе  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , т. е. до факторизации. Посмотрим, как эти преобразования действуют на  $\mathbb{H}$ .

Оператор  $R$  переводит  $z$  в  $z + 1$ . Он оставляет точку  $\infty$  на месте, а абсolut сдвигает на единицу вправо. Соответственно, преобразование  $R^a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  сдвигает абсolut на  $a$  единиц; здесь  $a$  может быть любым целым числом (даже отрицательным).

Оператор  $S = -\frac{1}{z}$  — это композиция инверсии и симметрии относительно мнимой оси. Это преобразование инволютивно:  $S^2 = I$ . Обратите внимание, что в  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  матрица  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  имела порядок 4, а не 2.

Далее, оператор  $L$  оставляет на месте 0, а точку  $z = \frac{1}{n}$  переводит в  $\frac{1}{n+1}$ . Нетрудно посчитать (проделайте это), что  $LS = SR^{-1}$ .

## § 7.5. Последовательности Штерна—Броко

Теперь рассмотрим прямую  $C$ , соединяющую  $\infty$  и  $0$  (как и раньше, мы будем считать прямые ориентированными; на картинке ниже стрелка направлена от начала прямой к концу). Если применить к ней оператор  $R$ , мы получим прямую  $RC$  с началом в  $\infty$  и концом в  $1$ ; аналогично прямая  $LC$  соединяет точки  $1$  и  $0$  на абсолюте. Мы получили треугольник, ограниченный тремя прямыми  $C$ ,  $LC$  и  $RC$ . Назовем этот треугольник  $T$ . Координата его средней вершины есть сумма Фарея координат двух крайних вершин.

Далее применим к треугольнику  $T$  оператор  $L$ . Мы получим треугольник  $LT$  с вершинами в  $0$ ,  $\frac{1}{2}$  и  $1$ . Стороны этого треугольника — это прямые  $LC$ ,  $L^2C$  и  $LRC$ . Аналогично у треугольника  $RT$  будут стороны  $RC$ ,  $RLC$  и  $R^2C$  (см. рис. 7.4). Тем самым мы получили следующий набор вершин абсолюта:  $0, \frac{1}{2}, 1, 2, \infty$ .

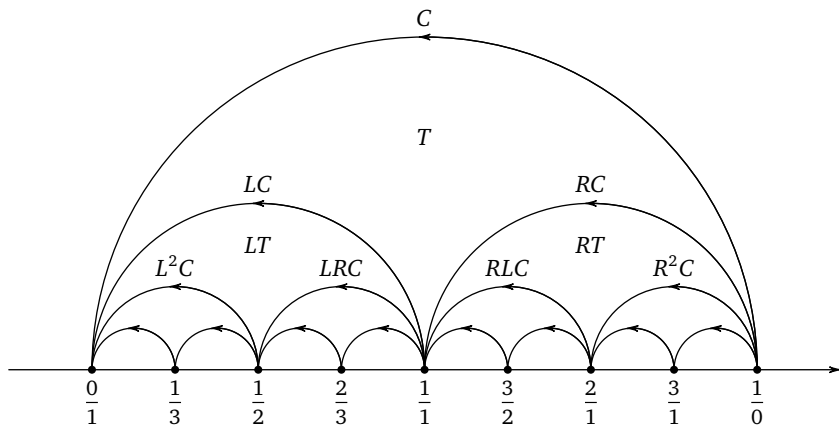


Рис. 7.4. Триангуляция Штерна—Броко

Эту процедуру можно продолжить: применим операторы  $L$  и  $R$  к треугольникам  $LT$  и  $RT$ . В результате получим набор из девяти вершин  $0 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \infty = \frac{1}{0}$ , причем каждая пара последовательных вершин будет соединена одной из прямых, которые получаются из  $C$  трехкратным применением операторов  $L$  и  $R$  (во всевозможных порядках). Отметим, что каждая новая вершина на абсолюте будет получаться как сумма Фарея своих соседей.

Это мотивирует следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.11. Нулевой последовательностью Штерна<sup>1</sup>—Броко<sup>2</sup> называется последовательность дробей  $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right)$ . Далее,  $k$ -й последовательностью Штерна—Броко называется последовательность дробей, получаемая из  $(k - 1)$ -й последовательности вставкой между каждыми ее соседними членами их медианты.

Так,  $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}\right)$  будет первой последовательностью Штерна—Броко,  $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}\right)$  — второй и так далее.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.12. Здесь, как и ранее, мы рассматриваем бесконечность как допустимое «число», выражаемое несократимой «дробью»  $\frac{1}{0}$ . Нам это никак не помешает, поскольку мы будем только сравнивать дроби между собой (мы при этом считаем, что бесконечность больше любого числа) и брать их суммы Фарая. В дальнейшем мы никак не будем дополнительно оговаривать этот момент.

Легко видеть, что каждая последовательность Штерна—Броко будет возрастать: действительно, это следует из того, что медианта двух дробей заключена между ними. В частности, поэтому все члены в каждой из этих последовательностей будут различны.

ТЕОРЕМА 7.13. (1) Любые две дроби  $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ , являющиеся соседями в некоторой последовательности Штерна—Броко, удовлетворяют соотношению  $qr - ps = 1$ , т. е. соответствующие числа соединены ребром в графе Фарая;

(2) все дроби, встречающиеся в последовательностях Штерна—Броко, несократимы;

(3) всякая несократимая дробь  $\frac{a}{b} > 0$  встречается в некоторой последовательности Штерна—Броко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Докажем это по индукции. Для нулевой последовательности утверждение очевидно. Далее, когда мы вставляем

<sup>1</sup>Мориц Штерн (Moritz Abraham Stern, 1807—1894) — немецкий математик, специалист в области теории чисел. Ученик К.-Ф. Гаусса. Ввел понятие простого числа Штерна — простого числа, не представимого в виде суммы меньшего простого и удвоенного квадрата целого числа. Определил дерево Штерна—Броко в работе 1858 г., независимо от А. Броко.

<sup>2</sup>Ашиль Броко (Achille Brocot, 1817—1878) — французский часовщик и математик-любитель. Сооснователь парижской часовой фирмы «Brocot & Delettrez», автор ряда усовершенствований часового механизма. Независимо от Штерна придумал дерево Штерна—Броко для аппроксимации вещественных чисел рациональными, что играло важную роль для расчета параметров используемых в часах шестеренок.



между соседними числами  $\frac{p}{q}$  и  $\frac{r}{s}$  их медианту  $\frac{p+r}{q+s}$ , то и для нее эти соотношения оказываются верными. Действительно:

$$(p+r)q - (q+s)p = qr - ps = 1; \quad r(q+s) - s(p+r) = qr - ps = 1.$$

(2) Это следует из предыдущего пункта: если  $qr - ps = 1$ , то  $p$  и  $q$  взаимно просты.

(3) Покажем, что всякая несократимая дробь  $\frac{a}{b}$  рано или поздно встретится в некоторой последовательности Штерна—Броко. Предположим, что она не встретилась в некоторой такой последовательности. Найдем в этой последовательности ближайшие отношения  $\frac{p}{q}$  и  $\frac{r}{s}$ , между которыми заключена эта дробь:

$$\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}.$$

Далее перейдем к следующей строке, заменив один из концов отрезка  $\left[\frac{p}{q}; \frac{r}{s}\right]$  на медианту его концов и выбрав ту половину, которая содержит  $\frac{a}{b}$ . Этот процесс не может продолжаться бесконечно, поскольку условия

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{q} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{r}{s} - \frac{a}{b} > 0$$

означают, что

$$aq - bp \geq 1 \quad \text{и} \quad br - as \geq 1.$$

А значит,

$$(r+s)(aq - bp) + (p+q)(br - as) \geq p+q+r+s. \quad (7.1)$$

С другой стороны, левая часть (7.1) равна

$$\begin{aligned} (r+s)(aq - bp) + (p+q)(br - as) &= \\ &= a((r+s)q - (p+q)s) + b((p+q)r - (r+s)p) = a + b. \end{aligned}$$

Поэтому неравенство (7.1) равносильно неравенству

$$a + b \geq p + q + r + s.$$

Но с каждым шагом либо  $p$ , либо  $q$ , либо  $r$ , либо  $s$  возрастает, стало быть, это неравенство перестанет выполняться самое большее через  $a + b$  шагов.  $\square$

Вернемся к рис. 7.4. Из предыдущей теоремы следует, что каждое положительное рациональное число получается как вершина некоторого треугольника в триангуляции Штерна—Броко.

Эту картинку можно еще представлять себе следующим образом. Рассмотрим бесконечный граф, двойственный к триангуляции Штерна—Броко: каждому треугольнику в триангуляции сопоставим вершину графа, в которой напишем число, отвечающее «средней» вершине треугольника. Вершины, отвечающие треугольникам, смежным по стороне, соединим ребрами. Мы получим двоичное дерево, начало которого изображено на рис. 7.5; оно также называется *деревом Штерна—Броко*.

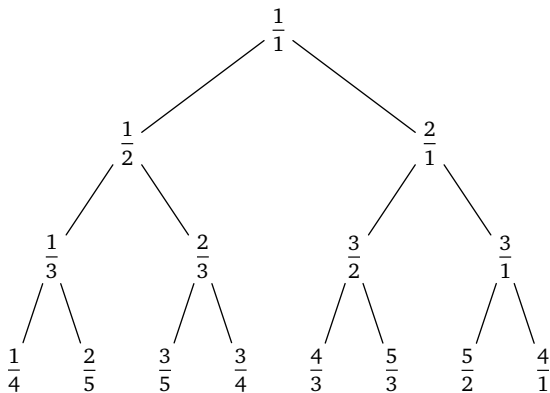


Рис. 7.5. Дерево Штерна—Броко

Теорема 7.13 утверждает, что каждое положительное рациональное число встречается в дереве Штерна—Броко, причем лишь один раз. Тем самым каждое число можно закодировать путем из корня (т. е. из  $\frac{1}{1}$ ) в соответствующую вершину: каждому числу отвечает однозначно определенное слово из букв  $R$  и  $L$ . Например, числу  $\frac{2}{1}$  будет отвечать слово  $R$ , числу  $\frac{4}{3}$  — слово  $RLL$  и так далее. Отсюда получается такое следствие.

**Следствие 7.14.** *Для каждой положительной несократимой дроби  $\frac{p}{q} > 1$  существует такая последовательность степеней  $(a_1, \dots, a_{2m})$ , что*

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = R^{a_1} L^{a_2} \dots R^{a_{2m-1}} L^{a_{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^+(a_1, \dots, a_{2m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

причем все  $a_i > 0$ .

Доказательство. Заметим, что  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  отвечает элементу 1 абсолюта. Теорема 7.13 утверждает, что любое положительное рациональное число на абсолюте можно получить из 1 применением слова, состоящего из  $R$  и  $L$ . А поскольку  $\frac{p}{q} > 1$ , то это число будет лежать в правой половине графа Штерна—Броко, то есть первой буквой соответствующего слова будет  $R$ , а не  $L$ .  $\square$

Итак, мы выяснили геометрический смысл операторов  $R$  и  $L$ : они переводят весь граф Штерна—Броко в его правую и левую половину соответственно. Тем самым набор  $(a_1, \dots, a_{2m})$  определяет преобразование  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$ , переводящее прямую  $(\infty, 0)$  в прямую  $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ , где  $\frac{r}{s}$  — последняя подходящая дробь к  $\frac{p}{q}$ . Все получающиеся при этом треугольники определяют триангуляцию-«бамбук» многоугольника с отмеченной стороной  $(\infty, 0)$ , состоящую из  $a_1$  треугольников вершиной «вверх»,  $a_2$  треугольников вершиной «вниз»,  $a_3$  вершиной «вверх» и так далее.

### § 7.6. Поворот триангуляции

Рассмотрим триангуляцию  $n$ -угольника, вложенную в граф Фарей. Обозначим через  $c_1$  сущность первой вершины — иначе говоря, число треугольников, сходящихся в вершине с отметкой 0. Это значит, что во второй вершине стоит отметка  $\frac{1}{c_1}$  (почему?). Рассмотрим оператор  $\begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  и применим его к плоскости  $\mathbb{H}$ . Посмотрим, куда при этом перейдет наш  $n$ -угольник. Для начала посмотрим на образы первых двух вершин, нуля и  $\frac{1}{c_1}$ :

$$\begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \infty; \quad \begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Получается, что они перейдут в последнюю и первую вершины соответственно, а соединяющая их прямая перейдет в прямую  $(\infty, 0)$ .

Далее, остальные вершины также перейдут в какие-то вершины с положительными координатами (контрольный вопрос: почему положительными?). Вообще говоря, они не будут совпадать с вершинами исходного  $n$ -угольника. Однако сохранится их взаимное расположение на прямой, так как абсолют сохраняется этим преобразованием.

Пусть  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{c_1}, \dots, \alpha_n = \infty$  — вершины исходного многоугольника, где  $\alpha_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ . Обозначим через  $\beta_i$  образ точки  $\alpha_i$  при пре-

образовании  $\begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Наш  $n$ -угольник перейдет в  $n$ -угольник с вершинами  $\beta_1 = \infty, \beta_2 = 0, \dots, \beta_n = c_1$ .

Такая операция будет соответствовать повороту  $n$ -угольника. Мы доказали следующее предложение.

**Предложение 7.15.** Преобразование  $\begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  переводит  $n$ -угольник со стороной  $(\infty, 0)$  и сущностью  $(c_1, \dots, c_n)$  (где первой вершиной считается точка 0) в  $n$ -угольник со стороной  $(\infty, 0)$  и сущностью  $(c_n, c_1, \dots, c_{n-1})$ .

Отсюда вытекает следствие:

**Следствие 7.16.** Пусть  $(c_1, \dots, c_n)$  — сущность  $n$ -угольника. Тогда

$$\begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} c_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \pm I.$$

**Доказательство.** Рассмотрим  $n$ -угольник с отмеченной стороной  $(\infty, 0)$  и сущностью  $(c_1, \dots, c_n)$ . В силу предыдущего предложения композиция таких преобразований сделает из него  $n$ -угольник с той же отмеченной стороной и той же сущностью. Согласно следствию 7.10, эта композиция есть тождественный элемент из  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , то есть  $\pm I$ .  $\square$

Из предложения 7.15 можно получить еще одно следствие. Рассмотрим триангуляцию-«бамбук» с сущностью  $(c_1, \dots, c_k, 1, c_{k+2}, \dots, c_{n-1}, 1)$ . Пусть  $\frac{p}{q}$  — координата  $(k+1)$ -й вершины. Рассмотрим оператор, поворачивающий нашу триангуляцию  $k$  раз. Этот оператор соответствует произведению

$$\begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} c_k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M(c_1, \dots, c_k).$$

Он переводит первую вершину триангуляции, т. е. точку  $\infty$ , в  $(k+1)$ -ю, т. е. в  $\frac{p}{q} = [[c_1, \dots, c_k]]$ . При этом последняя вершина переходит в вершину с номером  $k$ , то есть в  $\frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} = [[c_1, \dots, c_{k-1}]]$ .

Тем самым мы доказали, что если наборы  $(a_1, \dots, a_{2m})$  и  $(c_1, \dots, c_k)$  построены по одной и той же триангуляции-«бамбуку», то операторы  $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$  и  $M(c_1, \dots, c_k)$  переводят точку  $\infty$  в одну и ту же точку. Значит, первые столбцы соответствующих матриц совпадают (вообще говоря, с точностью до знака), что еще раз доказывает теорему 6.1.

**Упражнение 7.17.** Докажите подобным способом предложение 6.4.

## Глава 8. Подведем итоги

### § 8.1. Цепные дроби и фризы как решения уравнений в $SL_2(\mathbb{Z})$

В предыдущих главах мы говорили о фризах, о разложениях рациональных чисел в цепную дробь и о связанных с ними тождествах в группах  $PSL_2(\mathbb{Z})$  и  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

Мы увидели, что по положительному рациональному числу  $\frac{p}{q}$  можно построить его разложения в положительную и отрицательную цепную дробь; этим разложениям соответствует триангуляция-«бамбук» некоторого  $n$ -угольника. Если сущность  $n$ -угольника равна

$$(c_1, \dots, c_k, 1, c_{k+2}, \dots, c_{n-1}, 1),$$

то  $\frac{p}{q} = [[c_1, \dots, c_k]]$ . При этом сущность  $n$ -угольника дает решение матричного уравнения

$$M(c_1, \dots, c_n) = -I.$$

Более общим образом, такое решение имеет место для сущности произвольной триангуляции  $n$ -угольника, не обязательно для «бамбука». Такие триангуляции определяют фризы порядка  $n$ . Элементы фризостроятся исходя из сущности триангуляции — они вычисляются как континуанты от сущностей ее вершин. В частности, если триангуляция являлась «бамбуком» и соответствовала числу  $\frac{p}{q}$ , то на соседних диагоналях фриза можно прочесть числители и знаменатели подходящих дробей к  $\frac{p}{q}$ .

### § 8.2. Снова триангуляции и $3d$ -разрезания

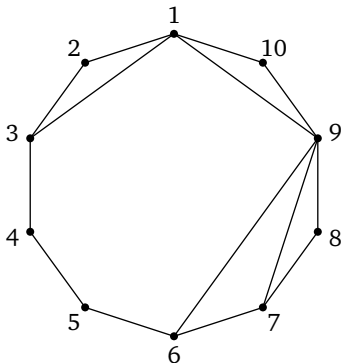
Возникает вопрос: для каких наборов  $(c_1, \dots, c_n)$  матрица  $M(c_1, \dots, c_n)$  оказывается равной  $\pm I$ , то есть определяет тождественное преобразование в  $PSL_2(\mathbb{Z})$ ? Все ли такие наборы получаются из триангуляций? Очевидно, что нет: так, в любое место имеющегося решения можно дописать три единицы подряд и снова получить решение, воспользовавшись соотношением  $M(1, 1, 1) = -I$ . А как описать все решения?

Полный ответ на этот вопрос был получен совсем недавно, в 2018 году. Он принадлежит В. Ю. Овсиенко [13]. Для того, чтобы его сформулировать, определим сначала понятие  $3d$ -разрезания выпуклого многоугольника.

**Определение 8.1.**  $3d$ -разрезанием выпуклого  $n$ -угольника (с пронумерованными вершинами) называется его разрезание набором непесекающихся диагоналей на многоугольники, число сторон каждого

из которых кратно 3. *Сущностью* разрезания  $n$ -угольника называется набор чисел  $(c_1, \dots, c_n)$ , где  $c_i$  — число многоугольников, сходящихся в  $i$ -й вершине.

ПРИМЕР 8.2. На рисунке изображено  $3d$ -разрезание десятиугольника, сущность которого равна  $(3, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 4, 1)$ .



Тем самым вместо триангуляций мы будем рассматривать разрезания  $n$ -угольника на треугольники, шестиугольники, девятиугольники и т. д. В отличие от случая триангуляций,  $3d$ -разрезание  $n$ -угольника нельзя восстановить по его сущности:

УПРАЖНЕНИЕ 8.3. Приведите пример двух различных  $3d$ -разрезаний  $n$ -угольника с одинаковыми сущностями.

УКАЗАНИЕ. Достаточно взять  $n = 8$ .

Оказывается, что помимо триангуляций решения уравнения

$$M(c_1, \dots, c_n) = \pm I$$

могут происходить и из других  $3d$ -разрезаний  $n$ -угольника. А именно, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8.4 [13]. *Равенство  $M(c_1, \dots, c_n) = \pm I$  имеет место тогда и только тогда, когда  $(c_1, \dots, c_n)$  является сущностью некоторого  $3d$ -разрезания  $n$ -угольника. При этом  $M(c_1, \dots, c_n) = -I$ , если число участвующих в разрезании многоугольников с четным числом сторон четно, и  $M(c_1, \dots, c_n) = I$  в противном случае.*

## Список литературы

- [1] В. И. Арнольд. Цепные дроби. М.: МЦНМО, 2009.
- [2] М. Гарднер. Крестики-нолики. М.: Мир, 1988.
- [3] Дж. Конвей. Числовые фризы // Квант. 1991. № 3. С. 69—70.
- [4] С. К. Ландо. Введение в дискретную математику. М.: МЦНМО, 2019.
- [5] Е. Ю. Смирнов. Три взгляда на ацтекский бриллиант. М.: МЦНМО, 2015.
- [6] Е. Ю. Смирнов. Числовые фризы // Квант. 2020. № 5. С. 15—24.
- [7] А. Я. Хинчин. Цепные дроби. М.: Физматлит, 1960.
- [8] D. Brolin, D. W. Crowe, I. M. Isaacs. The geometry of frieze patterns // Geometriae Dedicata. 1974. V. 3. P. 171—176.
- [9] J. H. Conway, H. S. M. Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns // The Mathematical Gazette. 1973. V. 57(401). P. 87—94.
- [10] J. H. Conway, H. S. M. Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns (continued) // The Mathematical Gazette. 1973. V. 57(401). P. 175—183.
- [11] S. Morier-Genoud. Coxeter's frieze patterns at the crossroads of algebra, geometry and combinatorics // Bulletin of the London Mathematical Society. 2015. V. 47, № 6. P. 895—938.
- [12] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko. Farey boat: Continued fractions and triangulations, modular group and polygon dissections // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2019. Bd. 121, № 2. S. 91—136.
- [13] V. Ovsienko. Partitions of unity in  $SL(2, \mathbb{Z})$ , negative continued fractions, and dissections of polygons // Res. Math. Sci. 2018. V. 5, № 2. Paper № 21.
- [14] А. В. Устинов. Короткое доказательство тождества Эйлера для континуантов // Матем. заметки. 2006. Т. 79, вып. 1. С. 155—156.
- [15] Doron Zeilberger. Dodgson's determinant-evaluation rule proved by two-timing men and women // Electronic Journal of Combinatorics. 1997. V. 4, № 2. Research paper 22.

## Содержание

Введение . . . . .	3
Глава 1. Фризы . . . . .	6
Глава 2. Континуанты . . . . .	13
Глава 3. Соотношения между элементами фриза . . . . .	21
Глава 4. Целочисленные фризы и триангуляции . . . . .	26
Глава 5. Цепные дроби . . . . .	33
Глава 6. Матрицы цепных дробей и группа $SL_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	42
Глава 7. Триангуляции и граф Фарей . . . . .	48
Глава 8. Подведем итоги . . . . .	61
Литература . . . . .	63