Формы Якоби и системы корней

Дима Адлер

(НИУ ВШЭ)

Мемориальная конференция
“Теория чисел и геометрия”
памяти А.И. Зыкина
24 июня 2021

1 Модулярные формы

Определение. Пусть k – целое число. Функция $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ называется модулярной формой веса k, если $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau)$ для $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, а также голоморфна на $\mathcal{H}$ и в точке ∞. В частности, f будет иметь разложение в ряд Фурье вида

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

Множество всех модулярных форм веса k обозначается $M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$.

Определение. Пусть модулярная форма f веса k имеет разложение в ряд Фурье вида

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n = a_1 q + \dots$$

Тогда такая форма называется параболической формой веса k. Множество всех параболических форм веса k обозначается $S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$.

2 Примеры модулярных форм

Одними из самых важных примеров в теории модулярных форм являются ряды Эйзенштейна. Ряд Эйзенштейна чётного веса k есть сумма ряда

$$G_k(\tau) = \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^k}.$$

Этот ряд сходится абсолютно при $k \geqslant 4$, а потому в нём можно менять порядок суммирования. Используя это и прямую подстановку действия группы $SL_2(\mathbb{Z})$, нетрудно проверить, что при $k \geqslant 4$ данный ряд действительно является модулярной формой веса k. Зачастую удобнее работать с нормализованным разложением в ряд Фурье формы $G_k(\tau)$:

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

где $\zeta(s)$ – это ζ-функция Римана, B_k – это k-е число Бернулли, и

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Важность рядов Эйзенштейна объясняется следующей теоремой.

Теорема Кольцо модулярных форм $M_*(SL_2(\mathbb{Z})) = \bigoplus_k M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ является свободной алгеброй над $\mathbb{C}$ с двумя образующими:

$$M_*(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[E_4, E_6].$$

Как следует из теоремы,

$$M_4(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}\langle E_4\rangle,\ M_6(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}\langle E_6\rangle,\ M_8(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}\langle E_4^2\rangle,$$

$$M_{10}(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}\langle E_4 E_6\rangle.$$

Однако пространство форм веса 12 уже двумерно и содержит Δ-функцию Рамануджана:

$$\Delta(\tau) = q\prod_{n\geqslant 1}(1-q^n)^{24} = \eta^{24}(\tau) = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728},$$

являющуюся параболической формой наименьшего возможного веса.

3 Ряд Эйзенштейна E_2

Как уже говорилось, при $n = 2$ определить ряд Эйзенштейна не удаётся, ввиду отсутствия абсолютной сходимости и, как следствие, отсутствия возможности изменения порядка суммирования. Но зафиксировав конкретный порядок суммирования, можно задать сходящийся ряд $E_2(\tau)$ в виде разложения в ряд Фурье:

$$E_2(\tau) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n.$$

Относительно модулярных преобразований $E_2(\tau)$ меняется следующим образом:

$$E_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2E_2(\tau) + \frac{6}{\pi i}c(c\tau+d). \tag{1}$$

Форма E_2 уже является квазимодулярной, а не модулярной. Вместе с рядами Эйзенштейна E_4 и E_6 форма E_2 порождает кольцо квазимодулярных форм $\tilde{M}_*(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$.

4 Дифференциальный оператор

Определим

$$D = q\frac{d}{dq} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau} : \sum a(n)q^n \mapsto \sum na(n)q^n.$$

Предположим, что существует модулярная форма веса 0, отличная от константы, то есть функция f, удовлетворяющая соотношению

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = f(\tau),\ \text{где}\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Заметим, что

$$D\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(c\tau+d)^2}.$$

Поэтому

$$(c\tau+d)^{-2}(Df)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (Df)(\tau).$$

Для форм веса отличного от 0:

$$(Df)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = ck(c\tau+d)^{k+1}f(\tau) + (c\tau+d)^{k+2}(Df)(\tau).$$

Зафиксируем модулярную форму $f \in M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$. Определим оператор D_k следующим образом:

$$(D_k f)(\tau) = \eta^{2k}(\tau) D\left(\frac{f(\tau)}{\eta^{2k}(\tau)}\right) = (Df)(\tau) - \frac{k}{12}E_2(\tau)f(\tau).$$

Теорема. Дифференциальный оператор D_k действует на множестве модулярных форм веса k, увеличивая их вес на 2:

$$D_k : M_k(SL_2(\mathbb{Z})) \to M_{k+2}(SL_2(\mathbb{Z})),$$

$$D_k : S_k(SL_2(\mathbb{Z})) \to S_{k+2}(SL_2(\mathbb{Z})).$$

Одним из известных примеров использования дифференциальных операторов в теории модулярных форм является **система дифференциальных уравнений Рамануджана:**

$$\begin{cases} DE_2 = \dfrac{1}{12}(E_2^2 - E_4) \\ DE_4 = \dfrac{1}{3}(E_2E_4 - E_6) \\ DE_6 = \dfrac{1}{2}(E_2E_6 - E_4^2) \end{cases},$$

которую в терминах оператора D_k можно переписать как

$$\begin{cases} D_2E_2 = -\dfrac{1}{12}(E_2^2 + E_4) \\ D_4E_4 = -\dfrac{1}{3}E_6 \\ D_6E_6 = -\dfrac{1}{2}E_4^2 \end{cases}.$$

5 Формы Якоби

Определение. Пусть L – положительно определённая решётка со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$, переменная τ принадлежит верхней полуплоскости $\mathcal{H}$, а многомерная переменная $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in L \otimes \mathbb{C}$. Тогда *форма Якоби веса k и индекса m для решётки L* (где k, $m \in \mathbb{Z}$) – это голоморфная функция $\varphi : \mathcal{H} \times (L \otimes \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{\mathfrak{z}}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{\pi i m \frac{c(\mathfrak{z},\mathfrak{z})}{c\tau+d}} \varphi(\tau,\mathfrak{z})$ для $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$;
2) $\varphi(\tau, \mathfrak{z} + l\tau + l') = e^{-2\pi i m(l,\mathfrak{z}) - \pi i m(l,l)\tau} \varphi(\tau,\mathfrak{z})$ для $l, l' \in L$;
3) функция $\varphi(\tau,\mathfrak{z})$ имеет разложение в ряд Фурье одного из трёх типов:

a) слабая форма Якоби

$$\varphi(\tau,\mathfrak{z}) = \sum_{l \in L^\vee} \sum_{n \geqslant 0} a(n,l) q^n \zeta^l = \sum_{l \in L^\vee} \sum_{n \geqslant 0} a(n,l) e^{2\pi i n\tau} e^{2\pi i(\mathfrak{z},l)},$$

множество таких форм обозначается

$$J^w_{*,*}(L) = \bigoplus_{k,m} J^w_{k,m}(L);$$

б) голоморфная форма Якоби

$$\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{l \in L^\vee} \sum_n a(n,l) q^n \zeta^l$$

и $a(n,l) \neq 0 \Rightarrow 2nm \geqslant (l,l)$, множество таких форм обозначается

$$J_{*,*}(L) = \bigoplus_{k,m} J_{k,m}(L);$$

в) параболическая форма Якоби

$$\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{l \in L^\vee} \sum_n a(n,l) q^n \zeta^l,$$

и $a(n,l) \neq 0 \Rightarrow 2nm > (l,l)$, множество таких форм обозначается

$$J^c_{*,*}(L) = \bigoplus_{k,m} J^c_{k,m}(L).$$

Очевидно, что

$$J^c_{*,*}(L) \subset J_{*,*}(L) \subset J^w_{*,*}.$$

6 Инвариантные формы

Определение. Пусть W – подгруппа полной ортогональной группы положительно определённой решётки L. Форма Якоби $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ (слабая, голоморфная или параболическая) для данной решётки называется W-инвариантной, если для любого $w \in W$

$$\varphi(\tau, w(\mathfrak{z})) = \varphi(\tau, \mathfrak{z}).$$

Замечание. В данном докладе мы будем рассматривать слабые формы Якоби, связанные с решётками, порождёнными системами корней. Инвариантность мы будем предполагать либо относительно полной ортогональной группы соответствующей решётки, либо относительно группы Вейля.

7 Примеры

Классическая нечётная тета-функция Якоби:

$$\vartheta_{11}(\tau,z)=-q^{\frac{1}{8}}\zeta^{-\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-1}\zeta)(1-q^{n}\zeta^{-1})(1-q^{n}).$$

М. Айхлер и Д. Загье "Теория форм Якоби":

$$\phi_{-2,1}(\tau,z)=\frac{\vartheta_{11}(\tau,z)\cdot\vartheta_{11}(\tau,-z)}{\eta^{6}(\tau)}=(\zeta-2+\zeta^{-1})+q\cdot(\dots)\in J^{w,W}_{-2,1}(A_1).$$

$$\phi_{0,1}(\tau,z)=\wp(\tau,z)\phi_{-2,1}(\tau,z)=(\zeta+10+\zeta^{-1})+q\cdot(\dots)\in J^{w,W}_{0,1}(A_1).$$

Теорема (М. Айхлер, Д. Загье, 1985).

$$J^{w,W}_{*,*}(A_1)=M_*[\phi_{0,1},\phi_{-2,1}].$$

8 Группа Якоби

Пусть L – положительно определённая решётка со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$. **Группа Гайзенберга** $H(L)$ для этой решётки есть центральное расширение $(L \times L) \ltimes \mathbb{Z}$:

$$H(L) = \{\mathbf{h} = [\lambda, \mu, r] : \lambda, \mu \in L, r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \quad \text{и} \quad r + \frac{1}{2}(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{h'} = [\lambda, \mu, r] \cdot [\lambda', \mu', r'] = [\lambda + \lambda', \mu + \mu', r + r' + \frac{1}{2}((\lambda, \mu') - (\lambda', \mu))].$$

Если L – решётка корней, то можно добавить инвариантность относительно действия группы Вейля:

$$\mathcal{W} = W \ltimes H(L) :$$

$$(w, \mathbf{h}) \cdot (w', \mathbf{h'}) = (w \cdot w', [\lambda + w\lambda', \mu + w\mu', r + r' + \frac{1}{2}((\lambda, w\mu') - (w\lambda', \mu))]).$$

Группа Якоби определяется как

$$\Gamma^J(L) = SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathcal{W} = SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes (W \ltimes H(L))$$

с действием на $\mathcal{W}$:

$$\gamma.w = w, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\gamma.\mathbf{h} = [d\lambda - c\mu, -b\lambda + a\mu, r]$$

$$(\gamma, w, \mathbf{h}) \cdot (\gamma', w', \mathbf{h'}) = (\gamma \cdot \gamma', w \cdot w', \mathbf{h} \cdot (\gamma.\mathbf{h'})).$$

Действует эта группа на **конусе Титса**: $\Omega = \mathcal{H} \oplus (L \otimes \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \ni (\tau, \mathfrak{z}, u)$:

$$\gamma(\tau, \mathfrak{z}, u) = \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{\mathfrak{z}}{c\tau + d}, u + \frac{c(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})}{2(c\tau + d)} \right);$$

$$w(\tau, \mathfrak{z}, u) = (\tau, w(\mathfrak{z}), u);$$

$$\mathbf{h}(\tau, \mathfrak{z}, u) = \left(\tau, \mathfrak{z} + \lambda\tau + \mu, u + r - (\lambda, \mathfrak{z}) - \frac{(\lambda, \lambda)}{2}\tau \right).$$

9 Формы Якоби – 2

Пусть L – положительно определённая решётка, порождённая системой корней R ранга n с группой Вейля W и обозначим $J(\gamma, L) = (c\tau + d)$ для $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ и 1 для $[\lambda, \mu, r] \in H(L)$.

Определение. Слабой W-инвариантной формой Якоби веса k и индекса m (k, $m \in \mathbb{Z}$) для решётки корней L со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ называется голоморфная функция $\varphi : \mathcal{H} \times (L \otimes \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, если функция

$$\tilde{\varphi}(Z) = \varphi(\tau, \mathfrak{z})e^{2\pi i m u}, \quad Z \in \Omega$$

преобразуется как

$$\tilde{\varphi}(M(Z)) = J(M, Z)^{-k}\tilde{\varphi}(Z), \quad M \in \Gamma^J(L)$$

и $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ имеет разложение в ряд Фурье вида:

$$\sum_{\lambda \in L^\vee, n \geqslant 0} a(n, l)q^n\zeta^\lambda, \quad q = e^{2\pi i\tau}, \zeta^\lambda = e^{2\pi i(\lambda, z)}.$$

10 Теоремы типа Шевалле

Многочлены

- Shephard, G. C., Todd, J. A., *Finite unitary reflection groups.* Can. J. Math., **6** (1954), 274–304, doi:10.4153/CJM-1954-028-3.
- C. Chevalley, *Invariants of finite groups generated by reflections.* Amer. J. Math. **77** (1955), 778–782.

Тэта-функции

- И.Н. Бернштейн, О.В. Шварцман, *Теорема Шевалле для комплексных кристаллографических кокстеровских групп.* Функц. анализ и его прил., **12:4** (1978), 79–80.
- E. Looijenga, *Invariant Theory for Generalized Root Systems.* Inv. Mathem. **61** (1980), 1–32.
- V. Kac, D. Peterson, *Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms.* Adv. in Math., **53** (1984), 125–264.

11 Теорема типа Шевалле для форм Якоби

Теорема (K. Wirthmüller, 1992). Для любой решётки L, порождённой одной из классических систем корней (кроме E_8), множество $J^{w,W}_{*,*}(R)$ всех слабых форм Якоби, инвариантных относительно группы Вейля, обладает структурой свободной биградуированной алгебры над кольцом модулярных форм с $n+1$ образующей:

$$J^{w,W}_{*,*}(R) = M_*[\varphi_{0,1}, \varphi_{-k(1),m(1)}, \ldots, \varphi_{-k(n),m(n)}], \quad j = 1, \ldots, n,$$

где множество всех $k(j)$ есть множество степеней $W(R)$-инвариантных многочленов и множество всех $m(j)$ есть множество коэффициентов в разложении старшего корня $\tilde{\alpha}$ дуальной системы корней $R^\vee$ в линейную комбинацию базисных элементов исходной системы корней.

Теорема (H. Wang, 2018). В случае системы корней E_8 соответствующая алгебра слабых форм Якоби не является полиномиальной.

Другие результаты

- I. Satake, *Flat Structure for the Simple Elliptic Singularity of Type* $\widetilde{E}_6$ *and Jacobi Form.* Proc. Japan Acad., $\mathbf{69}$, Ser. A (1993) No. 7, 247–251.
- M. Bertola, *Frobenius manifold structure on orbit space of Jacobi group; Part I.* Differential Geom. Appl. $\mathbf{13}$ (2000), 19–41.
- M. Bertola, *Frobenius manifold structure on orbit space of Jacobi group; Part II.* Differential Geom. Appl. $\mathbf{13}$ $\mathbf{(3)}$ (2000), 213–233.
- K. Sakai, E_n *Jacobi forms and Seiberg–Witten curves.* Commun. Number Theory Phys. 13 (2019), no. 1, 53–80.
- D. Adler, V. Gritsenko, *The* D_8*-tower of weak Jacobi forms and applications.* J. Geom. Phys., **150**, Article ID 103616, 12 p. (2020).
- D. Adler, *The structure of the algebra of Jacobi forms for the root system* F_4. Funktsional. Anal. i Prilozhen., **54:3** (2020), 8–25.
- D. Adler, V. Gritsenko, *Weak Jacobi forms for the* D_n*-type root systems and modular differential equations" (in preparation).*

12 Свойства систем корней

Для системы корней D_n мы имеем следующий список свойств.

- решётка $L(D_n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + \ldots + x_n \equiv 0 \mod 2\}$;
- группа Вейля состоит из перестановок и смены знака у чётного числа координат $\simeq S_n \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$;
- стандартный базис

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$

$$\ldots$$

$$\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n,$$

$$\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n;$$

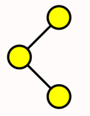
- а также

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n.$$

Исключительные случаи

Система корней $D_2 \simeq A_1 \oplus A_1$:

Система корней $D_3 \simeq A_3$:



В случае системы корней C_n

- решётка $L(C_n) = L(D_n)$;
- группа Вейля состоит из перестановок и смены знака у произвольного числа координат $\simeq S_n \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = O(D_n), n \neq 4$;
- стандартный базис

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$

$$\dots$$

$$\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n,$$

$$\alpha_n = 2\varepsilon_n;$$

- а также

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_{n-2} + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n.$$

В случае системы корней F_4

- решётка $L(F_4) = L(D_4)^*$;
- группа Вейля $\simeq S_3 \rtimes W(D_4) = O(D_4)$;
- стандартный базис

$$\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4,$$

$$\alpha_3 = \varepsilon_4,$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4),$$

- а также

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4.$$

Теорема в случае D_n. Для системы корней типа D_n множество всех $W(D_n)$-инвариантных слабых форм Якоби имеет структуру свободной алгебры над кольцом модулярных форм и

$$J^{w,O}_{*,*}(D_2) = M_*[\varphi_{0,1}, \varphi_{-2,1}, \varphi_{-4,1}],$$

$$J^{w,W}_{*,*}(D_3) = M_*[\varphi_{0,1}, \varphi_{-2,1}, \varphi_{-4,1}, \omega_{-3,1}],$$

$$J^{w,W}_{*,*}(D_4) = M_*[\varphi_{0,1}, \varphi_{-2,1}, \varphi_{-4,1}, \varphi_{-6,2}, \omega_{-4,1}],$$

$$J^{w,W}_{*,*}(D_n) = M_*[\varphi_{0,1}, \varphi_{-2,1}, \varphi_{-4,1}, \varphi_{-6,2}, \ldots, \varphi_{-2n+2,2}, \omega_{-n,1}],$$

причём образующая $\omega_{-n,1}$ антиинвариантна относительно смены знака у нечётного числа координат, а остальные инвариантны.

Теорема в случае C_n. Для систем корней типа C_n образующие те же, только $\omega_{-n,1}$ заменяется на $\omega^2_{-n,1}$.

Теорема в случае F_4. Для системы корней F_4 множество всех $W(F_4)$-инвариантных слабых форм Якоби имеет структуру свободной алгебры над кольцом модулярных форм и

$$J^{w,W}_{*,*}(F_4) = M_*[\varphi_{0,1}, \varphi_{-2,1}, \varphi_{-6,2}, \varphi_{-8,2}, \varphi_{-12,3}].$$

Условие башни

$$
\begin{array}{cccccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\varphi^{D_n}_{0,1}, & \varphi^{D_n}_{-2,1}, & \varphi^{D_n}_{-4,1}, & \varphi^{D_n}_{-6,2}, & \ldots, & \ldots, & \varphi^{D_n}_{-2n+2,2}, & (\omega^{D_n}_{-n,1})^2 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\varphi^{D_{n-1}}_{0,1}, & \varphi^{D_{n-1}}_{-2,1}, & \varphi^{D_{n-1}}_{-4,1}, & \varphi^{D_{n-1}}_{-6,2}, & \ldots, & \ldots, & (\omega^{D_{n-1}}_{-n+1,1})^2, & 0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \\
\varphi^{D_{n-2}}_{0,1}, & \varphi^{D_{n-2}}_{-2,1}, & \varphi^{D_{n-2}}_{-4,1}, & \varphi^{D_{n-2}}_{-6,2}, & \ldots, & \ldots, & 0 & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \cdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
\varphi^{D_4}_{0,1}, & \varphi^{D_4}_{-2,1}, & \varphi^{D_4}_{-4,1}, & \varphi^{D_4}_{-6,2}, & (\omega^{D_4}_{-4,1})^2, & 0 & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
\varphi^{D_3}_{0,1}, & \varphi^{D_3}_{-2,1}, & \varphi^{D_3}_{-4,1}, & (\omega^{D_4}_{-3,1})^2, & 0 & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
\varphi^{D_2}_{0,1}, & \varphi^{D_2}_{-2,1}, & \varphi^{D_2}_{-4,1}, & 0 & & & &
\end{array}
$$

Стрелки на диаграмме – ограничения на соответствующие подрешётки.

13 Построение образующих

Основными функциями в конструкции являются классические тета-функции

$$\vartheta_{00}(\tau,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n^2}{2}}\zeta^n,$$

$$\vartheta_{01}(\tau,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}}\zeta^n,$$

$$\vartheta_{10}(\tau,z)=q^{\frac{1}{8}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n(n+1)}{2}}\zeta^{n+\frac{1}{2}},$$

$$\vartheta_{11}(\tau,z)=q^{\frac{1}{8}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}\zeta^{n+\frac{1}{2}}.$$

Построение $\omega_{-n,1}^{D_n}$

Рассмотрим

$$\omega_{-n,1}^{D_n}(\tau, \mathfrak{z}) = \frac{\vartheta_{11}(\tau, z_1) \cdot \ldots \cdot \vartheta_{11}(\tau, z_n)}{\eta^{3n}(\tau)},$$

где $\eta(\tau)$ – функция Дедекинда.

Свойства:

- антиинвариантность относительно смены знака у нечётного числа координат,
- ограничение на D_{n-1} равно 0,
- дивизор состоит из $z_i = m + n\tau$.

Формы индекса 2

Пусть $\varphi_1 \in J_{k_1,m}(L_1)$ и $\varphi_2 \in J_{k_2,m}(L_2)$ – две формы одного индекса m для решёток L_1 and L_2. Тогда можно определить

$$\varphi_1\varphi_2 \in J_{k_1+k_2,m}(L_1 \oplus L_2).$$

Заметим, что

$$D_n < \mathbb{Z}^n.$$

Поэтому

$$D_n(2) < (\mathbb{Z}(2))^{\oplus n} \simeq (A_1)^{\oplus n}.$$

Поэтому

$$\varphi^{D_n}_{-2k,2}(\tau, z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{\sigma \in S_n} \varphi_{-2,1}(\tau, z_{\sigma(1)}) \ldots \varphi_{-2,1}(\tau, z_{\sigma(k)}) \times$$
$$\times \varphi_{0,1}(\tau, z_{\sigma(k+1)}) \ldots \varphi_{0,1}(\tau, z_{\sigma(n)}),$$

принадлежит $J^{w,W}_{-2k,2}(D_n)$.

Построение $\varphi_{0,1}^{D_n}$. Первый способ

Для произвольной формы Якоби можно рассмотреть оператор Гекке $T_-(t)$, увеличивающий индекс в t раз, не меняющий вес и не уменьшающий дивизор. А именно, для $\varphi_{k,m} \in J_{k,m}(L)$:

$$\left(\varphi_{k,m}\Big|_{T_-(t)}\right)(\tau, \mathfrak{z}) := \sum_{\substack{ad=t \\ b \operatorname{mod} d}} a^k t^{-1} \varphi_{k,m}\left(\frac{a\tau+b}{d}, a\mathfrak{z}\right).$$

Тогда можно построить

$$\varphi_{0,1}^{D_n} = 2\frac{\omega_{-n,1}\Big|_{T_-(2)}}{\omega_{-n,1}} =$$

$$= 2^{-n}\frac{\omega_{-n,1}(2\tau, 2\mathfrak{z})}{\omega_{-n,1}(\tau, \mathfrak{z})} + \frac{\omega_{-n,1}(\frac{\tau}{2}, \mathfrak{z})}{\omega_{-n,1}(\tau, \mathfrak{z})} + \frac{\omega_{-n,1}(\frac{\tau+1}{2}, \mathfrak{z})}{\omega_{-n,1}(\tau, \mathfrak{z})}.$$

Построение $\varphi_{0,1}^{D_n}$. Второй способ

Для другого способа построения $\varphi_{0,1}^{D_n}$ рассмотрим

$$\varphi_{0,1}^{D_n} = \frac{\vartheta_{00}(\tau,z_1)\cdot\ldots\cdot\vartheta_{00}(\tau,z_n)}{\vartheta_{00}^n(\tau,0)} + \frac{\vartheta_{01}(\tau,z_1)\cdot\ldots\cdot\vartheta_{01}(\tau,z_n)}{\vartheta_{01}^n(\tau,0)} + $$

$$+ \frac{\vartheta_{10}(\tau,z_1)\cdot\ldots\cdot\vartheta_{10}(\tau,z_n)}{\vartheta_{10}^n(\tau,0)}.$$

Как следует из свойств тета-функций, полученная форма будет иметь вес 0 и индекс 1 для решётки D_n. Также можно получить соотношения

$$\frac{\vartheta_{00}(\tau,z)}{\vartheta_{00}(\tau,0)} = \frac{\vartheta_{11}(\frac{\tau+1}{2},z)}{\vartheta_{11}(\tau,z)}\cdot\frac{\eta^3(\tau)}{\eta^3(\frac{\tau+1}{2})};$$

$$\frac{\vartheta_{01}(\tau,z)}{\vartheta_{01}(\tau,0)} = \frac{\vartheta_{11}(\frac{\tau}{2},z)}{\vartheta_{11}(\tau,z)}\cdot\frac{\eta^3(\tau)}{\eta^3(\frac{\tau}{2})};$$

$$\frac{\vartheta_{10}(\tau,z)}{\vartheta_{10}(\tau,0)} = \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_{11}(2\tau,2z)}{\vartheta_{11}(\tau,z)}\cdot\frac{\eta^3(\tau)}{\eta^3(2\tau)}.$$

Дифференциальный оператор

Определение. Пусть L – положительно определённая решётка ранга n_0 со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Пусть также $\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z})$ является слабой формой Якоби веса k и индекса m. Тогда можно определить модулярный дифференциальный оператор

$$H_k(\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z})) =$$

$$= \frac{6}{\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z}) + \frac{3}{2\pi^2 m}\left(\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}},\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}}\right)\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z}) + \frac{n_0-2k}{2}E_2(\tau)\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z}),$$

где $E_2(\tau) = 1 - 24q\cdot(\ldots)$ – квазимодулярный ряд Эйзенштейна веса 2.

В иной форме, используя разложение $\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z})$ в ряд Фурье, можно записать:

$$H_k(\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z})) = \sum_{n\geqslant 0,\, l\in L^\vee}(12n - \frac{6}{m}(l,l))a(n,l)q^n\zeta^l + \frac{n_0-2k}{2}E_2(\tau)\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z}).$$

Построение формы $\varphi_{-4,1}^{D_n}$

Применяя дифференциальные операторы и умножая формы на ряды Эйзенштейна, мы можем из формы $\varphi_{0,1}^{D_n}$ получить следующие:

Вес 2	Вес 4	Вес 6	Вес 8
$H_0(\varphi_{0,1}^{D_n})$	$H_2(H_0(\varphi_{0,1}^{D_n}))$	$H_4(H_2(H_0(\varphi_{0,1}^{D_n})))$	$H_6(H_4(H_2(H_0(\varphi_{0,1}^{D_n}))))$
	$E_4\varphi_{0,1}^{D_n}$	$E_4H_0(\varphi_{0,1}^{D_n})$	$E_4H_2(H_0(\varphi_{0,1}^{D_n}))$
		$E_6\varphi_{0,1}^{D_n}$	$E_6H_0(\varphi_{0,1}^{D_n})$
			$E_4^2\varphi_{0,1}^{D_n}$

Построение $\varphi_{-4,1}^{D_n}$

Прямое вычисление показывает, что

$$\varphi_{8,1}^{D_n} = 2E_4H_2(H_0(\varphi_{0,1}^{D_n})) + (n+4)E_6H_0(\varphi_{0,1}^{D_n}) - n^2E_4^2\varphi_{0,1}^{D_n} =$$

$$= q \cdot 576n(n+4)((n-4)2^{n-2} + \dots)$$

В результате, с точностью до умножения на ненулевую константу,

$$\varphi_{-4,1}^{D_n} = \frac{\varphi_{8,1}^{D_n}}{\Delta}.$$

Построение $\varphi_{-2,1}^{D_n}$

Теперь, применив дифференциальные оператор к $\varphi_{-4,1}^{D_n}$, мы получаем оставшуюся форму индекса 1:

$$\varphi_{-2,1}^{D_n} = H_{-4}(\varphi_{-4,1}^{D_n}).$$

Альтернативное построение в случае D_8

Для произвольной положительно определённой унимодулярной решётки со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ one можно определить тета-ряд

$$\vartheta_L(\tau,\mathfrak{z}) = \sum_{l\in L} q^{\frac{(l,l)}{2}} e^{2\pi i(l,Z)}.$$

Рассмотрим соответствующие ряды для $E_8 = \langle D_8, \frac{e_1+\ldots+e_8}{2}\rangle$ и $D_{16}^+ = \langle D_{16}, \frac{e_1+\ldots+e_{16}}{2}\rangle$.

Можно посчитать, что

$$E_4(\tau)\cdot\vartheta_{E_8}(\tau,\mathfrak{z}) - \vartheta_{D_{16}^+}\Big|_{D_8}(\tau,\mathfrak{z}) = q\cdot(128+\ldots).$$

Деление на $\Delta(\tau)$ и подправка дают

$$\varphi_{-4,1}^{D_8} = \frac{2E_4(\tau)\cdot\vartheta_{E_8}(\tau,\mathfrak{z}) - 2\vartheta_{D_{16}^+}\Big|_{D_8}(\tau,\mathfrak{z})}{\Delta(\tau)} - E_4\omega_{-8,1}^{D_8}.$$

Доказательство теоремы

Лемма 1. Построенные формы

$$\varphi_{0,1}, \varphi_{-2,1}, \varphi_{-4,1}, \varphi_{-6,2}, \dots, \varphi_{-2n+2,2}, \omega_{-n,1}$$

алгебраически независимы над кольцом модулярных форм.

Лемма 2. Любая $W(D_n)$-инвариантная форма Якоби есть многочлен от $\varphi_{0,1}, \varphi_{-2,1}, \varphi_{-4,1}, \varphi_{-6,2}, \dots, \varphi_{-2n+2,2}, \omega_{-n,1}$ есть многочлен с коэффициентами из кольца модулярных форм..

Следствие. Для систем корней типа C_n множество всех $W(C_n)$-инвариантных слабых форм

$$J^{w,W}_{*,*}(C_n) = M_*[\varphi_{0,1}, \varphi_{-2,1}, \varphi_{-4,1}, \varphi_{-6,2}, \dots, \varphi_{-2n+2,2}, \omega^2_{-n,1}].$$

14 Случай системы корней F_4

Основная теорема. Для системы корней F_4 множество всех $W(F_4)$-инвариантных слабых форм Якоби имеет структуру свободной алгебры над кольцом модулярных форм и

$$J^{w,W}_{*,*}(F_4) = M_*[\varphi^{F_4}_{0,1}, \varphi^{F_4}_{-2,1}, \varphi^{F_4}_{-6,2}, \varphi^{F_4}_{-8,2}, \varphi^{F_4}_{-12,3}].$$

Каждая из образующих есть многочлен от образующих для D_4:

$$8\varphi^{F_4}_{-12,3} = \varphi_{-4,1}(9\omega^2_{-4,1} - \varphi^2_{-4,1}),$$

$$4\varphi^{F_4}_{-8,2} = 3\omega^2_{-4,1} + \varphi^2_{-4,1},$$

$$-4\varphi^{F_4}_{-6,2} = 3\varphi_{-6,2} + 4\varphi_{-2,1}\varphi_{-4,1},$$

$$\varphi^{F_4}_{-2,1} = \varphi_{-2,1},$$

$$2\varphi^{F_4}_{0,1} = 3\varphi_{0,1} - E_4\varphi_{-4,1}.$$

15 Дифференциальные уравнения

Используя дифференциальный оператор можно получить следующие уравнения на образующие.

$$H_{-n}(\omega_{-n,1}) = 0.$$

Для форм $\varphi_{-4,1}^{D_n}$ и $\varphi_{0,1}^{D_n}$ третьего порядка:

$$4H_0(H_{-2}(H_{-4}(\varphi_{-4,1}))) - (3n^2 - 12n + 32)E_4 H_{-4}(\varphi_{-4,1}) +$$
$$+(n-4)^2(n+8)E_6\varphi_{-4,1} = 0,$$

и

$$4H_4(H_2(H_0(\varphi_{0,1}))) - (3n^2 + 12n + 32)E_4 H_0(\varphi_{0,1}) + n^2(n+12)E_6\varphi_{0,1} = 0.$$

В случае же формы $\varphi_{-2,1}^{D_n}$ получить дифференциальное уравнение третьего порядка по модулярному дифференциальному оператору нельзя, минимальный возможный порядок равен 4:

$$4H_4(H_2(H_0(H_{-2}(\varphi_{-2,1}^{D_n})))) - (3n^2 - 12n + 224)E_4 H_0(H_{-2}(\varphi_{-2,1}^{D_n})) +$$
$$+(n^3 + 24n^2 - 144n + 384)E_6 H_{-2}(\varphi_{-2,1}^{D_n}) - 12(n-8)(n-2)(n+4)E_4^2\varphi_{-2,1}^{D_n} = 0.$$

16 Система дифференциальных уравнений

Также на образующие может быть получена система диффереенциальных уравнений в духе системы Рамануджана:

$$\begin{cases} 4H_{-2}(\varphi^{D_n}_{-2,1}) - 3n\varphi^{D_n}_{0,1} - (n-8)E_4\varphi^{D_n}_{-4,1} = 0 \\ 3H_0(\varphi^{D_n}_{0,1}) - 2nE_4\varphi^{D_n}_{-2,1} - nE_6\varphi^{D_n}_{-4,1} = 0 \\ H_{-4}(\varphi^{D_n}_{-4,1}) - (n-4)\varphi^{D_n}_{-2,1} = 0 \end{cases}.$$

В терминах оператора теплопроводности эта система может быть записана как

$$\begin{cases} 2H(\varphi^{D_n}_{-4,1}) = 2(n-4)\varphi^{D_n}_{-2,1} - (n+8)E_2\varphi^{D_n}_{-4,1} \\ 4H(\varphi^{D_n}_{-2,1}) = 3n\varphi^{D_n}_{0,1} - 2(n+4)E_2\varphi^{D_n}_{-2,1} + (n-8)E_4\varphi^{D_n}_{-4,1} \\ 6H(\varphi^{D_n}_{0,1}) = -3nE_2\varphi^{D_n}_{0,1} + 4nE_4\varphi^{D_n}_{-2,1} - 2nE_6\varphi^{D_n}_{-4,1} \end{cases}.$$

17 Почему это интересно?

- **Эллиптический род;**

  V. Gritsenko, *Elliptic genus of Calabi–Yau manifolds and Jacobi and Siegel modular forms*, Алгебра и анализ, 11:5 (1999), 100–125; St. Petersburg Math. J., 11:5 (2000), 781–804

- **форма $\varphi_{0,1}$ и лоренцевы алгебры Каца-Муди;**

  V. Gritsenko, *Reflective modular forms and their applications.* Russian Math. Surveys **73:5** (2018), 797–864.

- **форма $\varphi_{-2,1}$ и инварианты Громова-Виттена;**

  G. Oberdieck, A. Pixton, *Gromov-Witten theory of elliptic fibrations: Jacobi forms and holomorphic anomaly equations.* Geom. Topol. **23:3** (2019), 1415–1489.

- **модулярные фробениусовы многообразия и решения WDVV;**

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{полиномиальные} & \longrightarrow & \text{тригонометрические} & \longrightarrow & \text{модулярные} \\
\Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow \\
\text{группы Кокстера} & \longrightarrow & \text{аффинные группы Вейля} & \longrightarrow & \text{группы Якоби}
\end{array}
$$

M. Bertola, *Frobenius manifold structure on orbit space of Jacobi group* PhD thesis (2000).

E.K. Morrison, *Modular Frobenius Manifolds.* PhD thesis (2012).

I. Satake, *Flat Structure for the Simple Elliptic Singularity of Type $\widetilde{E}_6$ and Jacobi Form.* Proc. Japan Acad., **69**, Ser. A (1993) No. 7, 247–251.

- **возможно другие дифференциальные уравнения.**

Спасибо за внимание!