Конструкции pipe dreams для многочленов Шуберта типов B, C и D

Тутубалина А. А.

Москва, июнь 2021

- G — односвязная полупростая группа Ли над $\mathbb{C}$, $B \subset G$ — борелевская подгруппа, $T \subset B$ — максимальный тор ($\dim T = n$). W — группа Вейля, соответствующая G.

Геометрическая мотивировка

- G — односвязная полупростая группа Ли над $\mathbb{C}$, $B \subset G$ — борелевская подгруппа, $T \subset B$ — максимальный тор ($\dim T = n$). W — группа Вейля, соответствующая G.
- G/B — многообразие флагов.

Геометрическая мотивировка

- G — односвязная полупростая группа Ли над $\mathbb{C}$, $B \subset G$ — борелевская подгруппа, $T \subset B$ — максимальный тор $(\dim T = n)$. W — группа Вейля, соответствующая G.
- G/B — многообразие флагов.
- $H^*(G/B, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n]/\mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n]_+^W$
(здесь $\mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n]_+^W$ — идеал, порожденный полиномиальными W-инвариантами положительной степени).

Геометрическая мотивировка

- G — односвязная полупростая группа Ли над $\mathbb{C}$, $B \subset G$ — борелевская подгруппа, $T \subset B$ — максимальный тор $(\dim T = n)$. W — группа Вейля, соответствующая G.
- G/B — многообразие флагов.
- $H^*(G/B, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]/\mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]_+^W$
(здесь $\mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]_+^W$ — идеал, порожденный полиномиальными W-инвариантами положительной степени).
- В $H^*(G/B, \mathbb{Q})$ есть базис из *классов Шуберта* σ_w (классов замыканий B-орбит в G/B), индексированных $w \in W$.

- G — односвязная полупростая группа Ли над $\mathbb{C}$, $B \subset G$ — борелевская подгруппа, $T \subset B$ — максимальный тор ($\dim T = n$). W — группа Вейля, соответствующая G.
- G/B — многообразие флагов.
- $H^*(G/B, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]/\mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]^W_+$ (здесь $\mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]^W_+$ — идеал, порожденный полиномиальными W-инвариантами положительной степени).
- В $H^*(G/B, \mathbb{Q})$ есть базис из *классов Шуберта* σ_w (классов замыканий B-орбит в G/B), индексированных $w \in W$.

Задача

Построить систему многочленов, представляющих классы Шуберта.

Геометрическая мотивировка

- G — односвязная полупростая группа Ли над $\mathbb{C}$, $B \subset G$ — борелевская подгруппа, $T \subset B$ — максимальный тор $(\dim T = n)$. W — группа Вейля, соответствующая G.
- G/B — многообразие флагов.
- $H^*(G/B, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]/\mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]_+^W$
(здесь $\mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]_+^W$ — идеал, порожденный полиномиальными W-инвариантами положительной степени).
- В $H^*(G/B, \mathbb{Q})$ есть базис из *классов Шуберта* σ_w (классов замыканий B-орбит в G/B), индексированных $w \in W$.

Задача

Построить систему многочленов, представляющих классы Шуберта.

- Ответ для $G = \mathrm{GL}_n$ — многочлены Шуберта $\mathfrak{S}_w$ (А. Ласку, М.-П. Шютценберже).
  - Определяются при помощи операторов разделенных разностей ∂_i.
  - Существует комбинаторное определение через т. н. pipe dreams (С. Фомин, Ан. Кириллов, а также С. Билли, Н. Бержерон).

- Вложения $\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}$ и $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$ индуцируют вложение многообразий флагов $\mathrm{GL}_n / B_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}$ и сюръекцию $H^*(\mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}, \mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$.

- Вложения $\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}$ и $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$ индуцируют вложение многообразий флагов $\mathrm{GL}_n / B_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}$ и сюръекцию $H^*(\mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}, \mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$.
- Она согласуется с классами Шуберта: $\sigma_w \in H^*(\mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}, \mathbb{Q})$ переходит в $\sigma_w \in H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$ для $w \in \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{n+1}$.

Геометрическая мотивировка

- Вложения $\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}$ и $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$ индуцируют вложение многообразий флагов $\mathrm{GL}_n / B_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}$ и сюръекцию $H^*(\mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}, \mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$.
- Она согласуется с классами Шуберта: $\sigma_w \in H^*(\mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}, \mathbb{Q})$ переходит в $\sigma_w \in H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$ для $w \in \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{n+1}$.
- Можно определить *стабильные классы Шуберта*: $\sigma_w^{(\infty)} = \varprojlim \sigma_w^{(n)} \in \varprojlim H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$ для $w \in \mathcal{S}_\infty = \bigcup \mathcal{S}_n$.

Геометрическая мотивировка

- Вложения $\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}$ и $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$ индуцируют вложение многообразий флагов $\mathrm{GL}_n / B_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}$ и сюръекцию $H^*(\mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}, \mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$.
- Она согласуется с классами Шуберта: $\sigma_w \in H^*(\mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}, \mathbb{Q})$ переходит в $\sigma_w \in H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$ для $w \in \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{n+1}$.
- Можно определить *стабильные классы Шуберта*: $\sigma_w^{(\infty)} = \varprojlim \sigma_w^{(n)} \in \varprojlim H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$ для $w \in \mathcal{S}_\infty = \bigcup \mathcal{S}_n$.
- Априори их представители — однородные формальные степенные ряды в $\mathbb{Q}[[z_1, z_2, \ldots]]$. Но в нашем случае это многочлены $\mathfrak{S}_w$.

- Вложения $\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}$ и $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$ индуцируют вложение многообразий флагов $\mathrm{GL}_n / B_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}$ и сюръекцию $H^*(\mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}, \mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$.
- Она согласуется с классами Шуберта: $\sigma_w \in H^*(\mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}, \mathbb{Q})$ переходит в $\sigma_w \in H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$ для $w \in \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{n+1}$.
- Можно определить *стабильные классы Шуберта*: $\sigma_w^{(\infty)} = \varprojlim \sigma_w^{(n)} \in \varprojlim H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$ для $w \in \mathcal{S}_\infty = \bigcup \mathcal{S}_n$.
- Априори их представители — однородные формальные степенные ряды в $\mathbb{Q}[[z_1, z_2, \ldots]]$. Но в нашем случае это многочлены $\mathfrak{S}_w$.
- То же самое можно сделать для групп $G_n = \mathrm{SO}_{2n+1}, \mathrm{Sp}_{2n}$ или SO_{2n}.

Задача

Построить систему представителей для $\sigma_w^{(\infty)} \in \varprojlim H^*(G_n/B_n, \mathbb{Q})$ в кольце $\mathbb{Q}[[z_1, z_2, \ldots]]$.

- Вложения $\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}$ и $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$ индуцируют вложение многообразий флагов $\mathrm{GL}_n / B_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}$ и сюръекцию $H^*(\mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}, \mathbb{Q}) \to H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$.
- Она согласуется с классами Шуберта: $\sigma_w \in H^*(\mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1}, \mathbb{Q})$ переходит в $\sigma_w \in H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$ для $w \in \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{n+1}$.
- Можно определить *стабильные классы Шуберта*: $\sigma_w^{(\infty)} = \varprojlim \sigma_w^{(n)} \in \varprojlim H^*(\mathrm{GL}_n / B_n, \mathbb{Q})$ для $w \in \mathcal{S}_\infty = \bigcup \mathcal{S}_n$.
- Априори их представители — однородные формальные степенные ряды в $\mathbb{Q}[[z_1, z_2, \dots]]$. Но в нашем случае это <u>многочлены</u> $\mathfrak{S}_w$.
- То же самое можно сделать для групп $G_n = \mathrm{SO}_{2n+1}, \mathrm{Sp}_{2n}$ или SO_{2n}.

Задача

Построить систему представителей для $\sigma_w^{(\infty)} \in \varprojlim H^*(G_n/B_n, \mathbb{Q})$ в кольце $\mathbb{Q}[[z_1, z_2, \dots]]$.

- <u>Ответ:</u> (С. Билли, М. Хайман) «Многочлены» Шуберта $\mathfrak{B}_w$, $\mathfrak{C}_w$ и $\mathfrak{D}_w \in \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, p_1(\mathbf{z}), p_3(\mathbf{z}), \dots]$, где $p_k(\mathbf{z}) = \sum z_i^k$.
  - Определяются также через разделенные разности.
  - Можно построить для них аналоги pipe dreams (А. Т., Е. Смирнов).

- Группа перестановок $\mathcal{S}_n$ состоит из биекций

$$w\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

Она порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1, \ldots, n-1$.

- Группа перестановок $\mathcal{S}_n$ состоит из биекций

$$w\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$$

Она порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1,\dots,n-1$.

- Группа $\mathcal{BC}_n$ состоит из биекций

$$w\colon \{-n,\dots,-1,1,\dots,n\} \to \{-n,\dots,-1,1,\dots,n\}$$

$$w(-i) = -w(i)$$

Порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1,\dots,n-1$ и $s_0 = (-1 \leftrightarrow 1)$.

- Группа перестановок $\mathcal{S}_n$ состоит из биекций
$$w\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$$
Она порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1,\ldots,n-1$.
- Группа $\mathcal{BC}_n$ состоит из биекций
$$w\colon \{-n,\ldots,-1,1,\ldots,n\} \to \{-n,\ldots,-1,1,\ldots,n\}$$
$$w(-i) = -w(i)$$
Порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1,\ldots,n-1$ и $s_0 = (-1 \leftrightarrow 1)$.
- Группа $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{BC}_n$ состоит из элементов w, меняющих знак у четного числа чисел $1,\ldots,n$. Порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1,\ldots,n-1$ и $s_{\hat{1}} = s_0 s_1 s_0 = (-1 \leftrightarrow 2) \circ (1 \leftrightarrow -2)$.

- Группа перестановок $\mathcal{S}_n$ состоит из биекций
$$w\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$$
Она порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1,\dots,n-1$.
- Группа $\mathcal{BC}_n$ состоит из биекций
$$w\colon \{-n,\dots,-1,1,\dots,n\} \to \{-n,\dots,-1,1,\dots,n\}$$
$$w(-i) = -w(i)$$
Порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1,\dots,n-1$ и $s_0 = (-1 \leftrightarrow 1)$.
- Группа $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{BC}_n$ состоит из элементов w, меняющих знак у четного числа чисел $1,\dots,n$. Порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1,\dots,n-1$ и $s_{\hat{1}} = s_0 s_1 s_0 = (-1 \leftrightarrow 2) \circ (1 \leftrightarrow -2)$.
- Обозначим
$$\mathcal{S}_\infty = \varinjlim \mathcal{S}_n,\ \mathcal{BC}_\infty = \varinjlim \mathcal{BC}_n,\ \mathcal{D}_\infty = \varinjlim \mathcal{D}_n$$

Классические группы Вейля

- Группа перестановок $\mathcal{S}_n$ состоит из биекций
$$w\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$$
Она порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1,\dots,n-1$.
- Группа $\mathcal{BC}_n$ состоит из биекций
$$w\colon \{-n,\dots,-1,1,\dots,n\} \to \{-n,\dots,-1,1,\dots,n\}$$
$$w(-i) = -w(i)$$
Порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1,\dots,n-1$ и $s_0 = (-1 \leftrightarrow 1)$.
- Группа $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{BC}_n$ состоит из элементов w, меняющих знак у четного числа чисел $1,\dots,n$. Порождается простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $i = 1,\dots,n-1$ и $s_{\hat{1}} = s_0 s_1 s_0 = (-1 \leftrightarrow 2) \circ (1 \leftrightarrow -2)$.
- Обозначим
$$\mathcal{S}_\infty = \varinjlim \mathcal{S}_n,\ \mathcal{BC}_\infty = \varinjlim \mathcal{BC}_n,\ \mathcal{D}_\infty = \varinjlim \mathcal{D}_n$$
- Через $\mathcal{F}_\infty$ будем обозначать одну из групп $\mathcal{S}_\infty, \mathcal{BC}_\infty, \mathcal{D}_\infty$.

Образующие групп $\mathcal{S}_\infty, \mathcal{BC}_\infty, \mathcal{D}_\infty$ связаны соотношениями Кокстера: $s_i^2 = e$ для всех i и

$\mathcal{S}_\infty$ $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$;

Образующие групп $\mathcal{S}_\infty, \mathcal{BC}_\infty, \mathcal{D}_\infty$ связаны соотношениями Кокстера: $s_i^2 = e$ для всех i и

$\mathcal{S}_\infty$ $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$;

$\mathcal{BC}_\infty$ $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$,
$s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0$.

Образующие групп $\mathcal{S}_\infty, \mathcal{BC}_\infty, \mathcal{D}_\infty$ связаны соотношениями Кокстера: $s_i^2 = e$ для всех i и

$\mathcal{S}_\infty$ $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$;

$\mathcal{BC}_\infty$ $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$,
$s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0$.

$\mathcal{D}_\infty$ $s_1 s_{\hat{1}} = s_{\hat{1}} s_1$
$s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$ (здесь $i, j \in \{\hat{1}, 1, 2, \ldots\}$; при арифметических операциях воспринимаем $\hat{1}$ как 1).

Образующие групп $\mathcal{S}_\infty, \mathcal{BC}_\infty, \mathcal{D}_\infty$ связаны соотношениями Кокстера: $s_i^2 = e$ для всех i и

$\mathcal{S}_\infty$ $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$;

$\mathcal{BC}_\infty$ $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$,
$s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0$.

$\mathcal{D}_\infty$ $s_1 s_{\hat{1}} = s_{\hat{1}} s_1$
$s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$ (здесь $i, j \in \{\hat{1}, 1, 2, \ldots\}$; при арифметических операциях воспринимаем $\hat{1}$ как 1).

Слово в $\mathcal{F}_\infty$ — последовательность образующих: $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_k})$. Это слово *представляет* w, если $w = s_{i_1} \ldots s_{i_k}$.

Образующие групп $\mathcal{S}_\infty, \mathcal{BC}_\infty, \mathcal{D}_\infty$ связаны соотношениями Кокстера: $s_i^2 = e$ для всех i и

$\mathcal{S}_\infty$ $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$;

$\mathcal{BC}_\infty$ $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$,
$s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0$.

$\mathcal{D}_\infty$ $s_1 s_{\hat{1}} = s_{\hat{1}} s_1$
$s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$ (здесь $i, j \in \{\hat{1}, 1, 2, \dots\}$; при арифметических операциях воспринимаем $\hat{1}$ как 1).

Слово в $\mathcal{F}_\infty$ — последовательность образующих: $(s_{i_1}, \dots, s_{i_k})$. Это слово *представляет* w, если $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$. *Длина* $\ell(w)$ элемента w — это длина самого короткого слова, представляющего w.

Образующие групп $\mathcal{S}_\infty, \mathcal{BC}_\infty, \mathcal{D}_\infty$ связаны соотношениями Кокстера: $s_i^2 = e$ для всех i и

$\mathcal{S}_\infty$ $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$;

$\mathcal{BC}_\infty$ $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$,
$s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0$.

$\mathcal{D}_\infty$ $s_1 s_{\hat{1}} = s_{\hat{1}} s_1$
$s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$,
$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, для $i \geq 1$ (здесь $i, j \in \{\hat{1}, 1, 2, \dots\}$; при арифметических операциях воспринимаем $\hat{1}$ как 1).

Слово в $\mathcal{F}_\infty$ — последовательность образующих: $(s_{i_1}, \dots, s_{i_k})$. Это слово *представляет* w, если $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$. *Длина* $\ell(w)$ элемента w — это длина самого короткого слова, представляющего w. Слова минимальной длины, представляющие w, называются *приведенными.*

Однострочная запись: $w = w(1)w(2)\dots w(n)$. В случае $w \in \mathcal{BC}_n$ или $w \in \mathcal{D}_n$ пишем $\overline{m}$ вместо $-m < 0$. Например:

$$1432 \in \mathcal{S}_4, \quad 3\bar{2}\bar{4}1 \in \mathcal{BC}_4$$

Действие групп Вейля на кольцо многочленов

Рассматриваем кольца $\mathbb{Q}[\mathbf{z}] = \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots]$ и $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots] =$
$= \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, p_1, p_3, \dots]$, где $p_k = z_1^k + z_2^k + \dots$.

Рассматриваем кольца $\mathbb{Q}[\mathbf{z}] = \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots]$ и $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots] =$
$= \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, p_1, p_3, \dots]$, где $p_k = z_1^k + z_2^k + \dots$.

- $\mathcal{S}_\infty$ действует на кольцо многочленов $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ перестановкой z_i:

$$s_i f(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots) = f(z_1, \dots, z_{i+1}, z_i, \dots)$$

Действие групп Вейля на кольцо многочленов

Рассматриваем кольца $\mathbb{Q}[\mathbf{z}] = \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots]$ и $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots] =$
$= \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, p_1, p_3, \dots]$, где $p_k = z_1^k + z_2^k + \dots$.

- $\mathcal{S}_\infty$ действует на кольцо многочленов $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ перестановкой z_i:

$$s_i f(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots) = f(z_1, \dots, z_{i+1}, z_i, \dots)$$

- $\mathcal{BC}_\infty$ действует на кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Q}[[\mathbf{z}]]$:

$$s_i f(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots) = f(z_1, \dots, z_{i+1}, z_i, \dots) \text{ для } i \geq 1$$

$$s_0 f(z_1, z_2, \dots) = f(-z_1, z_2, \dots).$$

Действие групп Вейля на кольцо многочленов

Рассматриваем кольца $\mathbb{Q}[\mathbf{z}] = \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots]$ и $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots] =$
$= \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, p_1, p_3, \dots]$, где $p_k = z_1^k + z_2^k + \dots$.

- $\mathcal{S}_\infty$ действует на кольцо многочленов $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ перестановкой z_i:

$$s_i f(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots) = f(z_1, \dots, z_{i+1}, z_i, \dots)$$

- $\mathcal{BC}_\infty$ действует на кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Q}[[\mathbf{z}]]$:

$$s_i f(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots) = f(z_1, \dots, z_{i+1}, z_i, \dots) \text{ для } i \geq 1$$

$$s_0 f(z_1, z_2, \dots) = f(-z_1, z_2, \dots).$$

Можно ограничить это действие на $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ и $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots]$:

$$s_i p_k = p_k \quad \text{и} \quad s_0 p_k = p_k - 2z_1^k$$

Рассматриваем кольца $\mathbb{Q}[\mathbf{z}] = \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots]$ и $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots] =$
$= \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, p_1, p_3, \dots]$, где $p_k = z_1^k + z_2^k + \dots$.

- $\mathcal{S}_\infty$ действует на кольцо многочленов $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ перестановкой z_i:

$$s_i f(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots) = f(z_1, \dots, z_{i+1}, z_i, \dots)$$

- $\mathcal{BC}_\infty$ действует на кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Q}[[\mathbf{z}]]$:

$$s_i f(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots) = f(z_1, \dots, z_{i+1}, z_i, \dots) \text{ для } i \geq 1$$

$$s_0 f(z_1, z_2, \dots) = f(-z_1, z_2, \dots).$$

  Можно ограничить это действие на $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ и $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots]$:

$$s_i p_k = p_k \quad \text{и} \quad s_0 p_k = p_k - 2z_1^k$$

- $\mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{BC}_\infty$ также действует на $\mathbb{Q}[[\mathbf{z}]], \mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ и $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots]$.

$$s_i f(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots) = f(z_1, \dots, z_{i+1}, z_i, \dots) \text{ для } i \geq 1$$

$$s_{\hat{1}} f(z_1, z_2, z_3 \dots) = f(-z_2, -z_1, z_3 \dots).$$

Операторы разделенных разностей действуют на $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ и $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots]$ следующим образом:

$$\partial_i f = \frac{f - s_i f}{z_i - z_{i+1}} \quad \text{для} \quad i \geq 1;$$

$$\partial_0 f = \frac{f - s_0 f}{-2z_1};$$

$$\partial_0^B f = \frac{f - s_0 f}{-z_1};$$

$$\partial_{\hat{1}} f = \frac{f - s_{\hat{1}} f}{-z_1 - z_2}.$$

Операторы разделенных разностей действуют на $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ и $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots]$ следующим образом:

$$\partial_i f = \frac{f - s_i f}{z_i - z_{i+1}} \quad \text{для} \quad i \geq 1;$$

$$\partial_0 f = \frac{f - s_0 f}{-2z_1};$$

$$\partial_0^B f = \frac{f - s_0 f}{-z_1};$$

$$\partial_{\hat{1}} f = \frac{f - s_{\hat{1}} f}{-z_1 - z_2}.$$

Заметим, что в каждом из этих случаев частное действительно является многочленом/формальным степенным рядом.

- *Многочлены Шуберта* (типа A) $\mathfrak{S}_w(\mathbf{z}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ индексированы перестановками $w \in \mathcal{S}_\infty$, однородны и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\mathrm{id}} &= 1; \\ \partial_i \mathfrak{S}_w &= \begin{cases} \mathfrak{S}_{ws_i} & \text{если} \quad \ell(ws_i) < \ell(w); \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \end{aligned}$$

  для всех $i \geq 1$.

- *Многочлены Шуберта* (типа A) $\mathfrak{S}_w(\mathbf{z}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ индексированы перестановками $w \in \mathcal{S}_\infty$, однородны и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\mathrm{id}} &= 1; \\ \partial_i \mathfrak{S}_w &= \begin{cases} \mathfrak{S}_{ws_i} & \text{если} \quad \ell(ws_i) < \ell(w); \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \end{aligned}$$

  для всех $i \geq 1$.

- *Многочлены Шуберта типа C* $\mathfrak{C}_w(\mathbf{z}, \mathbf{p}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \ldots]$ индексированы перестановками $w \in \mathcal{BC}_\infty$, однородны по $\mathbf{z}$ и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\mathrm{id}} &= 1; \\ \partial_i \mathfrak{C}_w &= \begin{cases} \mathfrak{C}_{ws_i} & \text{если} \quad \ell(ws_i) < \ell(w); \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

  для всех $i \geq 0$.

- *Многочлены Шуберта* (типа A) $\mathfrak{S}_w(\mathbf{z}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{z}]$ индексированы перестановками $w \in \mathcal{S}_\infty$, однородны и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\mathrm{id}} &= 1; \\ \partial_i \mathfrak{S}_w &= \begin{cases} \mathfrak{S}_{ws_i} & \text{если} \quad \ell(ws_i) < \ell(w); \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \end{aligned}$$

  для всех $i \geq 1$.

- *Многочлены Шуберта типа C* $\mathfrak{C}_w(\mathbf{z}, \mathbf{p}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \ldots]$ индексированы перестановками $w \in \mathcal{BC}_\infty$, однородны по $\mathbf{z}$ и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\mathrm{id}} &= 1; \\ \partial_i \mathfrak{C}_w &= \begin{cases} \mathfrak{C}_{ws_i} & \text{если} \quad \ell(ws_i) < \ell(w); \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

  для всех $i \geq 0$.

- *Многочлены Шуберта типа B*: $\mathfrak{B}_w = 2^{-s(w)} \mathfrak{C}_w$, где $s(w)$ — количество чисел $\{1, 2, \ldots\}$, меняющих знак под действием $w \in \mathcal{BC}_\infty$. Другое определение: заменить в (**??**) ∂_0 на ∂_0^B.

Многочлены Шуберта

- *Многочлены Шуберта типа D* $\mathfrak{D}_w(\mathbf{z},\mathbf{p}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots]$ индексированы перестановками $w \in \mathcal{D}_\infty$, однородны по $\mathbf{z}$ и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\mathrm{id}} &= 1; \\ \partial_i \mathfrak{D}_w &= \begin{cases} \mathfrak{D}_{ws_i} & \text{если} \quad \ell(ws_i) < \ell(w); \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \end{aligned}$$

для всех $i = \hat{1}, 1, 2, \dots$.

- *Многочлены Шуберта типа* D $\mathfrak{D}_w(\mathbf{z},\mathbf{p}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots]$ индексированы перестановками $w \in \mathcal{D}_\infty$, однородны по $\mathbf{z}$ и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\mathrm{id}} &= 1; \\ \partial_i \mathfrak{D}_w &= \begin{cases} \mathfrak{D}_{ws_i} & \text{если} \quad \ell(ws_i) < \ell(w); \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \end{aligned}$$

для всех $i = \hat{1}, 1, 2, \dots$.

Многочлены Шуберта (всех типов) однозначно задаются этими соотношениями.

- *Многочлены Шуберта типа* D $\mathfrak{D}_w(\mathbf{z},\mathbf{p}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1, p_3, \dots]$ индексированы перестановками $w \in \mathcal{D}_\infty$, однородны по $\mathbf{z}$ и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{\mathrm{id}} &= 1;\\ \partial_i \mathfrak{D}_w &= \begin{cases}\mathfrak{D}_{ws_i} & \text{если} \quad \ell(ws_i) < \ell(w);\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}\end{aligned}$$

для всех $i = \hat{1}, 1, 2, \dots$.

Многочлены Шуберта (всех типов) однозначно задаются этими соотношениями.

Пример

$$\mathfrak{S}_{s_i} = z_1 + z_2 + \dots + z_i$$

$$\mathfrak{B}_{s_i} = \mathfrak{C}_{s_i} = \mathfrak{D}_{s_i} = -(z_{i+1} + z_{i+2} + z_{i+3} + \dots) \text{ для } i \geq 1 \text{ (для } i \geq 2 \text{ в случае } \mathfrak{D}_{s_i})$$

$$\mathfrak{C}_{s_0} = -(z_1 + z_2 + \dots)$$

$$\mathfrak{B}_{s_0} = -(z_1 + z_2 + \dots)/2$$

$$\mathfrak{D}_{s_1} = -(-z_1 + z_2 + z_3 + \dots)/2$$

$$\mathfrak{D}_{s_{\hat{1}}} = -(z_1 + z_2 + \dots)/2$$

Для удобства заменим кольцо $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{z}), p_3(\mathbf{z}), \ldots]$ изоморфным ему $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \ldots]$, где $p_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$, и изоморфизм задан формулой $p_k(\mathbf{x}) = -p_k(\mathbf{z})/2$.

Для удобства заменим кольцо $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{z}), p_3(\mathbf{z}), \ldots]$ изоморфным ему $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \ldots]$, где $p_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$, и изоморфизм задан формулой $p_k(\mathbf{x}) = -p_k(\mathbf{z})/2$.

В новом кольце многочлены Шуберта будут многочленами по переменным $\mathbf{z}$ и симметрическими функциями по переменным $\mathbf{x}$.

Для удобства заменим кольцо $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{z}), p_3(\mathbf{z}), \ldots]$ изоморфным ему $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \ldots]$, где $p_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$, и изоморфизм задан формулой $p_k(\mathbf{x}) = -p_k(\mathbf{z})/2$.

В новом кольце многочлены Шуберта будут многочленами по переменным $\mathbf{z}$ и симметрическими функциями по переменным $\mathbf{x}$.

Образующие групп $\mathcal{BC}_\infty$ и $\mathcal{D}_\infty$ действуют на $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \ldots]$ по правилам:

$$\begin{aligned} s_i f(z_1, \ldots, z_i, z_{i+1}, \ldots; x_1, x_2, \ldots) &= f(z_1, \ldots, z_{i+1}, z_i, \ldots; x_1, x_2, \ldots) \quad \text{для } i \geq 1; \\ s_0 f(z_1, z_2, z_3, \ldots; x_1, x_2, \ldots) &= f(-z_1, z_2, z_3 \ldots; z_1, x_1, x_2, \ldots); \\ s_{\hat{1}} f(z_1, z_2, z_3 \ldots; x_1, x_2, \ldots) &= f(-z_2, -z_1, z_3 \ldots; z_1, z_2, x_1, x_2, \ldots). \end{aligned}$$

Многочлены Шуберта

Для удобства заменим кольцо $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{z}), p_3(\mathbf{z}), \ldots]$ изоморфным ему $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \ldots]$, где $p_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$, и изоморфизм задан формулой $p_k(\mathbf{x}) = -p_k(\mathbf{z})/2$.

В новом кольце многочлены Шуберта будут многочленами по переменным $\mathbf{z}$ и симметрическими функциями по переменным $\mathbf{x}$.

Образующие групп $\mathcal{BC}_\infty$ и $\mathcal{D}_\infty$ действуют на $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \ldots]$ по правилам:

$$\begin{aligned} s_i f(z_1, \ldots, z_i, z_{i+1}, \ldots; x_1, x_2, \ldots) &= f(z_1, \ldots, z_{i+1}, z_i, \ldots; x_1, x_2, \ldots) \quad \text{для } i \geq 1; \\ s_0 f(z_1, z_2, z_3, \ldots; x_1, x_2, \ldots) &= f(-z_1, z_2, z_3 \ldots; z_1, x_1, x_2, \ldots); \\ s_{\hat{1}} f(z_1, z_2, z_3 \ldots; x_1, x_2, \ldots) &= f(-z_2, -z_1, z_3 \ldots; z_1, z_2, x_1, x_2, \ldots). \end{aligned}$$

Пример

$$\mathfrak{S}_{s_i} = z_1 + z_2 + \cdots + z_i$$

$$\mathfrak{B}_{s_i} = \mathfrak{C}_{s_i} = \mathfrak{D}_{s_i} = z_1 + \cdots + z_i + 2p_1(\mathbf{x}) \text{ для } i \geq 1 \text{ (для } i \geq 2 \text{ в случае } \mathfrak{D}_{s_i})$$

$$\mathfrak{C}_{s_0} = 2p_1(\mathbf{x})$$

$$\mathfrak{B}_{s_0} = p_1(\mathbf{x})$$

$$\mathfrak{D}_{s_1} = z_1 + p_1(\mathbf{x})$$

$$\mathfrak{D}_{s_{\hat{1}}} = p_1(\mathbf{x})$$

Зафиксируем n. Рассмотрим диаграмму Юнга формы $(n-1, \dots, 2, 1)$, которую мы будем называть *базой* $B_{\mathcal{S}_n}$.

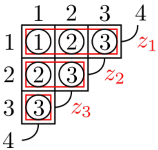


Рис.: База для pipe dreams размера $n = 4$

Pipe dreams для многочленов Шуберта типа A

Зафиксируем n. Рассмотрим диаграмму Юнга формы $(n-1, \ldots, 2, 1)$, которую мы будем называть *базой* B_{S_n}. Заполним ее крестами $+$ и коленами .

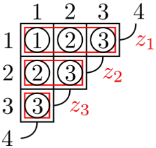


Рис.: База для pipe dreams размера $n = 4$

Pipe dreams для многочленов Шуберта типа A

Зафиксируем n. Рассмотрим диаграмму Юнга формы $(n-1,\ldots,2,1)$, которую мы будем называть *базой* B_{S_n}. Заполним ее крестами $+$ и коленами . Поместим по одиночному колену справа от каждого ряда и пронумеруем строки и столбцы числами от 1 до n. Получается объект, называемый *pipe dream*. Он состоит из n «труб», соединяющих левый край базы с верхним.

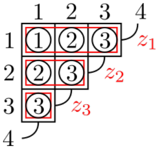


Рис.: База для pipe dreams размера $n=4$

Pipe dreams для многочленов Шуберта типа A

Зафиксируем n. Рассмотрим диаграмму Юнга формы $(n-1,\ldots,2,1)$, которую мы будем называть *базой* $B_{\mathcal{S}_n}$. Заполним ее крестами $+$ и коленами . Поместим по одиночному колену справа от каждого ряда и пронумеруем строки и столбцы числами от 1 до n. Получается объект, называемый *pipe dream*. Он состоит из n «труб», соединяющих левый край базы с верхним.

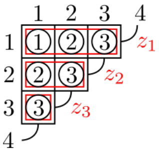


Рис.: База для pipe dreams размера $n = 4$

Каждой клетке $\square$ базы $B_{\mathcal{S}_n}$ сопоставим:

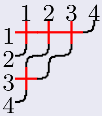
- Вес $\mathrm{wt}(\square)$. Он равен 1 для креста $+$ и 0 для колена .
- Элемент $\sigma(\square) \in \mathcal{S}_n$. Он равен s_i для креста на i-той диагонали и id для колена.
- Переменную $\mathrm{var}(\square) = z_i$, где i — номер строки.

Каждому pipe dream D сопоставим:

- Моном $\mathbf{z}^{\beta(D)} = \prod_{\square \in B_{\mathcal{S}_n}} \mathrm{var}(\square)^{\mathrm{wt}(\square)}$ (т.е. произведение z_i по всем крестам в D);

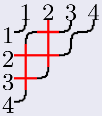
Пример

$D_1 =$



$\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1^3 z_3$

$D_2 =$

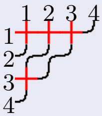


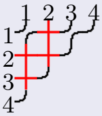
$\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1 z_2^2 z_3$

Каждому pipe dream D сопоставим:

- Моном $\mathbf{z}^{\beta(D)} = \prod_{\square \in B_{\mathcal{S}_n}} \mathrm{var}(\square)^{\mathrm{wt}(\square)}$ (т.е. произведение z_i по всем крестам в D);
- Слово $\mathrm{word}(D)$, получающееся при выписывании букв $\sigma(\square)$ при чтении D справа налево сверху вниз.

Пример

$D_1 =$ 

$D_2 =$ 

$$\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1^3 z_3$$

$$\mathrm{word}(D_1) = s_3 s_2 s_1 s_3$$

$$\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1 z_2^2 z_3$$

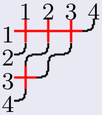
$$\mathrm{word}(D_2) = s_2 s_3 s_2 s_3$$

Pipe dreams для многочленов Шуберта типа A

Каждому pipe dream D сопоставим:

- Моном $\mathbf{z}^{\beta(D)} = \prod_{\square \in B_{\mathcal{S}_n}} \mathrm{var}(\square)^{\mathrm{wt}(\square)}$ (т.е. произведение z_i по всем крестам в D);
- Слово $\mathrm{word}(D)$, получающееся при выписывании букв $\sigma(\square)$ при чтении D справа налево сверху вниз.
- Если $\mathrm{word}(D)$ — приведенное слово для $w \in \mathcal{S}_n$, то pipe dream D называется *приведенным формы* $w = w(D)$.

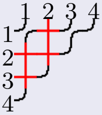
Пример

$D_1 =$ 

$$\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1^3 z_3$$

$$\mathrm{word}(D_1) = s_3 s_2 s_1 s_3$$

$$w(D_1) = 4132 \in \mathcal{S}_4$$

$D_2 =$ 

$$\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1 z_2^2 z_3$$

$$\mathrm{word}(D_2) = s_2 s_3 s_2 s_3$$

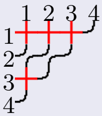
D_2 — неприведенный

Pipe dreams для многочленов Шуберта типа A

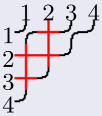
Каждому pipe dream D сопоставим:

- Моном $\mathbf{z}^{\beta(D)} = \prod_{\square \in B_{\mathcal{S}_n}} \mathrm{var}(\square)^{\mathrm{wt}(\square)}$ (т.е. произведение z_i по всем крестам в D);
- Слово $\mathrm{word}(D)$, получающееся при выписывании букв $\sigma(\square)$ при чтении D справа налево сверху вниз.
- Если $\mathrm{word}(D)$ — приведенное слово для $w \in \mathcal{S}_n$, то pipe dream D называется *приведенным формы* $w = w(D)$.

Пример

$D_1 =$ 

$$\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1^3 z_3$$
$$\mathrm{word}(D_1) = s_3 s_2 s_1 s_3$$
$$w(D_1) = 4132 \in \mathcal{S}_4$$

$D_2 =$ 

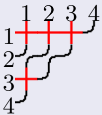
$$\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1 z_2^2 z_3$$
$$\mathrm{word}(D_2) = s_2 s_3 s_2 s_3$$
D_2 — неприведенный

Pipe dream приведенный $\Longleftrightarrow$ никакие две трубы не пересекаются дважды.

Каждому pipe dream D сопоставим:

- Моном $\mathbf{z}^{\beta(D)} = \prod_{\Box \in B_{\mathcal{S}_n}} \mathrm{var}(\Box)^{\mathrm{wt}(\Box)}$ (т.е. произведение z_i по всем крестам в D);
- Слово $\mathrm{word}(D)$, получающееся при выписывании букв $\sigma(\Box)$ при чтении D справа налево сверху вниз.
- Если $\mathrm{word}(D)$ — приведенное слово для $w \in \mathcal{S}_n$, то pipe dream D называется *приведенным формы* $w = w(D)$.

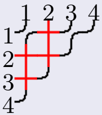
Пример

$D_1 =$ 

$\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1^3 z_3$

$\mathrm{word}(D_1) = s_3 s_2 s_1 s_3$

$w(D_1) = 4132 \in \mathcal{S}_4$

$D_2 =$ 

$\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1 z_2^2 z_3$

$\mathrm{word}(D_2) = s_2 s_3 s_2 s_3$

D_2 — неприведенный

Pipe dream приведенный $\iff$ никакие две трубы не пересекаются дважды. Каждая труба в D соединяет i слева с $w(D)(i)$ сверху.

Обозначим множество всех приведенных pipe dreams данной формы $w \in \mathcal{S}_n$ через $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$.

Теорема (Ан. Кириллов, С. Фомин, а также С. Билли, Н. Бержерон)

Для перестановки $w \in \mathcal{S}_n$ верно

$$\mathfrak{S}_w(\mathbf{z}) = \sum_{D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)} \mathbf{z}^{\beta(D)}.$$

Обозначим множество всех приведенных pipe dreams данной формы $w \in \mathcal{S}_n$ через $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$.

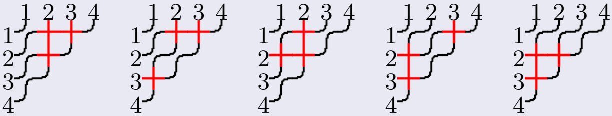
Теорема (Ан. Кириллов, С. Фомин, а также С. Билли, Н. Бержерон)

Для перестановки $w \in \mathcal{S}_n$ верно

$$\mathfrak{S}_w(\mathbf{z}) = \sum_{D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)} \mathbf{z}^{\beta(D)}.$$

Пример

Пусть $w = 1432 \in \mathcal{S}_4$.



$$\mathfrak{S}_{1432}(\mathbf{z}) = z_1^2 z_2 + z_1^2 z_3 + z_1 z_2^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^2 z_3.$$

База $B^k_{\mathcal{B}_n}$ состоит из блока-«лесенки» (диаграммы Юнга формы $(n-1,\dots,2,1)$) и k блоков-«уголков» (диаграмм Юнга формы $(n,1^{n-1})$). Блоки соединены коленами.
В клетках с номером 0 размещаем колена или колена с краном. В остальных клетках размещаем кресты $+$ или колена.
Назовем полученный объект b-pipe dream.

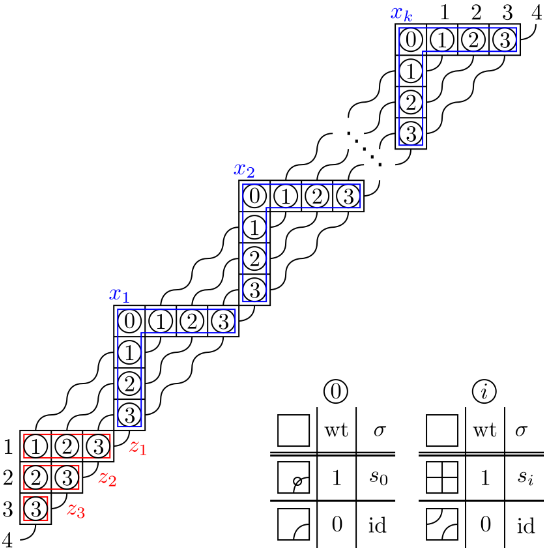


Рис.: База $B^k_{\mathcal{B}_4}$ для b-pipe dreams

Каждой клетке $\square$ базы $B^k_{\mathcal{B}_n}$ сопоставим:

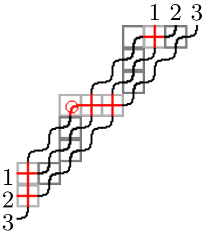
- Вес $\mathrm{wt}(\square)$. Он равен 1 для креста $+$ и колена с краном и 0 для колена , .
- Букву $\sigma(\square) \in \mathcal{BC}_n$. Он равен s_i для креста на диагонали с номером $i > 0$, s_0 для колена с краном и id для колена.
- Переменную $\mathrm{var}(\square)$. Она равна z_i для клетки в i-той строке лесенки и x_i для клетки в i-том блоке-уголке.

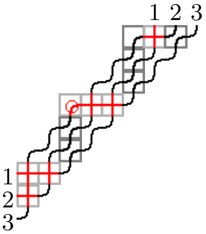
Каждой клетке $\square$ базы $B^k_{\mathcal{B}_n}$ сопоставим:

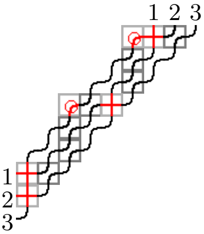
- Вес $\mathrm{wt}(\square)$. Он равен 1 для креста $+$ и колена с краном и 0 для колена , .
- Букву $\sigma(\square) \in \mathcal{BC}_n$. Он равен s_i для креста на диагонали с номером $i > 0$, s_0 для колена с краном и id для колена.
- Переменную $\mathrm{var}(\square)$. Она равна z_i для клетки в i-той строке лесенки и x_i для клетки в i-том блоке-уголке.

Каждому b-pipe dream D сопоставим:

- Моном $\mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)} = \prod_{\square \in B^k_{\mathcal{B}_n}} \mathrm{var}(\square)^{\mathrm{wt}(\square)}$ (т.е. произведение z_i и x_i по всем крестам и коленам с краном в D);
- Слово $\mathrm{word}(D)$, получающееся при выписывании букв $\sigma(\square)$ при чтении D справа налево сверху вниз.
- Если $\mathrm{word}(D)$ — приведенное слово для $w \in \mathcal{BC}_n$, то b-pipe dream D называется *приведенным формы* $w = w(D)$.

$D_1 =$ 

$D_2 =$ 

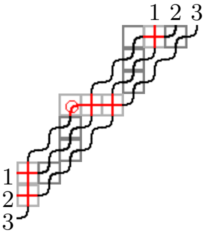
$D_3 =$ 

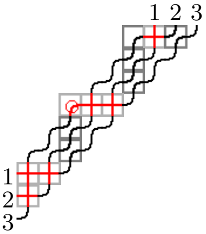
$\mathbf{x}^{\alpha(D_1)}\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1 z_2 x_1^3 x_2$

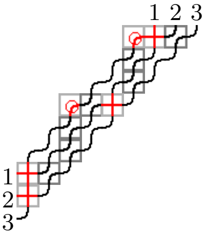
$\mathbf{x}^{\alpha(D_2)}\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1^2 z_2 x_1^3 x_2$

$\mathbf{x}^{\alpha(D_3)}\mathbf{z}^{\beta(D_3)} = z_1 z_2 x_1^2 x_2^2$

Pipe dreams типа B

$D_1 =$ 

$D_2 =$ 

$D_3 =$ 

$\mathbf{x}^{\alpha(D_1)}\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1 z_2 x_1^3 x_2$

$\mathrm{word}(D_1) = s_1 s_2 s_1 s_0 s_1 s_2$

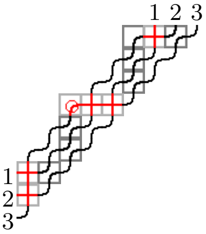
$\mathbf{x}^{\alpha(D_2)}\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1^2 z_2 x_1^3 x_2$

$\mathrm{word}(D_2) = s_1 s_2 s_1 s_0 s_2 s_1 s_2$

$\mathbf{x}^{\alpha(D_3)}\mathbf{z}^{\beta(D_3)} = z_1 z_2 x_1^2 x_2^2$

$\mathrm{word}(D_3) = s_1 s_0 s_2 s_0 s_1 s_2$

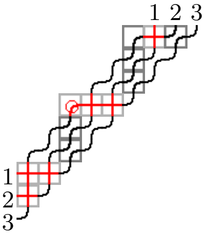
Pipe dreams типа B

$D_1 =$ 

$$\mathbf{x}^{\alpha(D_1)}\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1 z_2 x_1^3 x_2$$

$$\mathrm{word}(D_1) = s_1 s_2 s_1 s_0 s_1 s_2$$

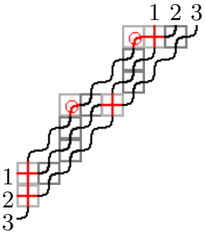
$$w(D_1) = 21\overline{3} \in \mathcal{BC}_3$$

$D_2 =$ 

$$\mathbf{x}^{\alpha(D_2)}\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1^2 z_2 x_1^3 x_2$$

$$\mathrm{word}(D_2) = s_1 s_2 s_1 s_0 s_2 s_1 s_2$$

D_2 — неприведенный.

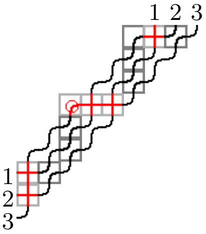
$D_3 =$ 

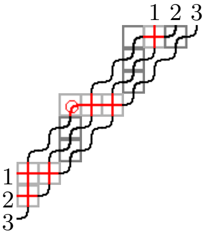
$$\mathbf{x}^{\alpha(D_3)}\mathbf{z}^{\beta(D_3)} = z_1 z_2 x_1^2 x_2^2$$

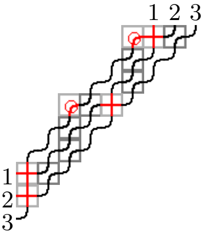
$$\mathrm{word}(D_3) = s_1 s_0 s_2 s_0 s_1 s_2$$

D_3 — неприведенный.

Pipe dreams типа B

$D_1 =$ 

$D_2 =$ 

$D_3 =$ 

$\mathbf{x}^{\alpha(D_1)}\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1 z_2 x_1^3 x_2$

$\mathrm{word}(D_1) = s_1 s_2 s_1 s_0 s_1 s_2$

$w(D_1) = 21\bar{3} \in \mathcal{BC}_3$

$\mathbf{x}^{\alpha(D_2)}\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1^2 z_2 x_1^3 x_2$

$\mathrm{word}(D_2) = s_1 s_2 s_1 s_0 s_2 s_1 s_2$

D_2 — неприведенный.

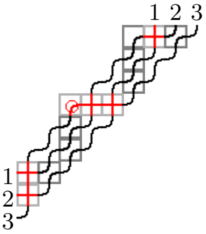
$\mathbf{x}^{\alpha(D_3)}\mathbf{z}^{\beta(D_3)} = z_1 z_2 x_1^2 x_2^2$

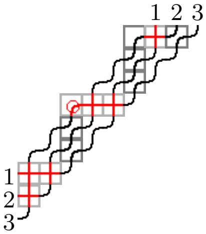
$\mathrm{word}(D_3) = s_1 s_0 s_2 s_0 s_1 s_2$

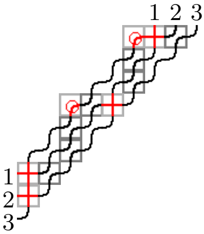
D_3 — неприведенный.

B-pipe dream является приведенным тогда и только тогда, когда

- на каждой трубе не более одного крана, и
- если две трубы пересекаются дважды, то ровно на одной из них есть кран между пересечениями.

$D_1 =$ 

$D_2 =$ 

$D_3 =$ 

$\mathbf{x}^{\alpha(D_1)}\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1 z_2 x_1^3 x_2$

$\mathrm{word}(D_1) = s_1 s_2 s_1 s_0 s_1 s_2$

$w(D_1) = 21\bar{3} \in \mathcal{BC}_3$

$\mathbf{x}^{\alpha(D_2)}\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1^2 z_2 x_1^3 x_2$

$\mathrm{word}(D_2) = s_1 s_2 s_1 s_0 s_2 s_1 s_2$

D_2 — неприведенный.

$\mathbf{x}^{\alpha(D_3)}\mathbf{z}^{\beta(D_3)} = z_1 z_2 x_1^2 x_2^2$

$\mathrm{word}(D_3) = s_1 s_0 s_2 s_0 s_1 s_2$

D_3 — неприведенный.

B-pipe dream является приведенным тогда и только тогда, когда

- на каждой трубе не более одного крана, и
- если две трубы пересекаются дважды, то ровно на одной из них есть кран между пересечениями.

Каждая труба соединяет i слева с $\pm w(D)(i)$. На трубе есть кран $\Leftrightarrow$ $w(D)(i)$ отрицательно.

Определение

Пусть $F \in \mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \dots]$ и $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Определим *$k$-усечение* F:

$$F^{[k]}(\mathbf{z}, x_1, \dots, x_k) = F(\mathbf{z}, x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots).$$

Это симметрический многочлен по переменным $x_1, \dots, x_k$.

Определение

Пусть $F \in \mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \dots]$ и $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Определим *$k$-усечение* F:

$$F^{[k]}(\mathbf{z}, x_1, \dots, x_k) = F(\mathbf{z}, x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots).$$

Это симметрический многочлен по переменным $x_1, \dots, x_k$.

Обозначим множество всех приведенных b-pipe dreams данной формы $w \in \mathcal{BC}_n$ в базе с k блоками-«уголками» через $\mathrm{PD}^k_{\mathcal{B}_n}(w)$.

Теорема

Пусть $w \in \mathcal{BC}_n$ и $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда

$$\mathfrak{B}^{[k]}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \sum_{D \in \mathrm{PD}^k_{\mathcal{B}_n}(w)} \mathbf{x}^{\alpha(D)} \mathbf{z}^{\beta(D)}$$

Бесконечные pipe dreams

Можно рассматривать базу с бесконечным числом блоков-«уголков»:

$$B_{\mathcal{B}_n} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B^k_{\mathcal{B}_n}.$$

Будем заполнять ее по тем же принципам, что и конечные базы, приведенность определяется так же.

Бесконечные pipe dreams

Можно рассматривать базу с бесконечным числом блоков-«уголков»:

$$B_{\mathcal{B}_n} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B^k_{\mathcal{B}_n}.$$

Будем заполнять ее по тем же принципам, что и конечные базы, приведенность определяется так же. В приведенном бесконечном b-pipe dream D конечное число крестов $+$ и колен с кранами , поэтому форма $w(D)$ и моном $\mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)}$ определены корректно.

Можно рассматривать базу с бесконечным числом блоков-«уголков»:

$$B_{\mathcal{B}_n} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B^k_{\mathcal{B}_n}.$$

Будем заполнять ее по тем же принципам, что и конечные базы, приведенность определяется так же. В приведенном бесконечном b-pipe dream D конечное число крестов $+$ и колен с кранами , поэтому форма $w(D)$ и моном $\mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)}$ определены корректно.

Пусть $\mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ — множество всех бесконечных приведенных b-pipe dreams данной формы $w \in \mathcal{BC}_n$:

$$\mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{PD}^k_{\mathcal{B}_n}(w)$$

Бесконечные pipe dreams

Можно рассматривать базу с бесконечным числом блоков-«уголков»:

$$B_{\mathcal{B}_n} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B^k_{\mathcal{B}_n}.$$

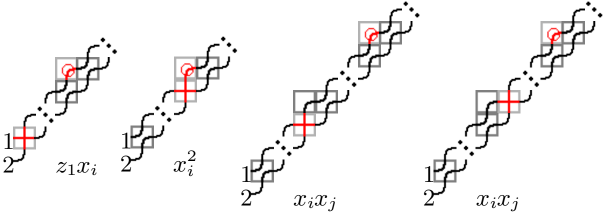
Будем заполнять ее по тем же принципам, что и конечные базы, приведенность определяется так же. В приведенном бесконечном b-pipe dream D конечное число крестов $+$ и колен с кранами , поэтому форма $w(D)$ и моном $\mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)}$ определены корректно.
Пусть $\mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ — множество всех бесконечных приведенных b-pipe dreams данной формы $w \in \mathcal{BC}_n$:

$$\mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{PD}^k_{\mathcal{B}_n}(w)$$

Тогда многочлен Шуберта типа B можно получить как сумму мономов по бесконечным b-pipe dreams данной формы:

$$\mathfrak{B}_w(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \varprojlim_{k \to \infty} \mathfrak{B}^{[k]}_w(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \varprojlim_{k \to \infty} \sum_{D \in \mathrm{PD}^k_{\mathcal{B}_n}(w)} \mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)} = \sum_{D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)} \mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)}.$$

$$w = 2\bar{1} = s_0 s_1 \in \mathcal{BC}_2$$



$$\mathfrak{B}_{s_0 s_1} = z_1 \sum_i x_i + \sum_i x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j = z_1 p_1(\mathbf{x}) + p_1^2(\mathbf{x}).$$

Pipe dreams типа C

База $B^k_{C_n}$ состоит из блока-«лесенки» (диаграммы Юнга формы $(n-1,\dots,2,1)$) и k блоков-«уголков» (каждый уголок составлен из вертикального и горизонтального прямоугольника $1 \times n$). Блоки соединены коленами. В клетках с номером 0 размещаем колена или колена с краном. В остальных клетках размещаем кресты $+$ или колена. Назовем полученный объект c-pipe dream.

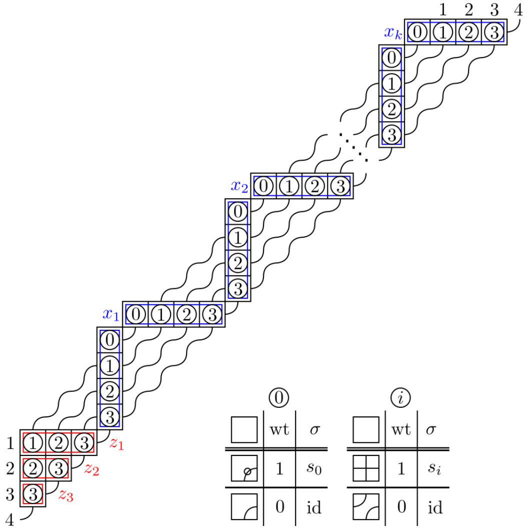


Рис.: База $B^k_{C_4}$ для c-pipe dreams

Для каждого c-pipe dream D моном $\mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)}$, слово $\mathrm{word}(D)$, свойство приведенности и форма $w(D)$ определяется так же, как в типе B.

Для каждого c-pipe dream D моном $\mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)}$, слово $\mathrm{word}(D)$, свойство приведенности и форма $w(D)$ определяется так же, как в типе B. Обозначим множество всех приведенных c-pipe dreams данной формы $w \in \mathcal{BC}_n$ в базе с k блоками-«уголками» через $\mathrm{PD}^k_{\mathcal{C}_n}(w)$.

Теорема

Пусть $w \in \mathcal{BC}_n$ и $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда

$$\mathfrak{C}^{[k]}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \sum_{D \in \mathrm{PD}^k_{\mathcal{C}_n}(w)} \mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)}$$

Для каждого c-pipe dream D моном $\mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)}$, слово $\mathrm{word}(D)$, свойство приведенности и форма $w(D)$ определяется так же, как в типе B. Обозначим множество всех приведенных c-pipe dreams данной формы $w \in \mathcal{BC}_n$ в базе с k блоками-«уголками» через $\mathrm{PD}^k_{\mathcal{C}_n}(w)$.

Теорема

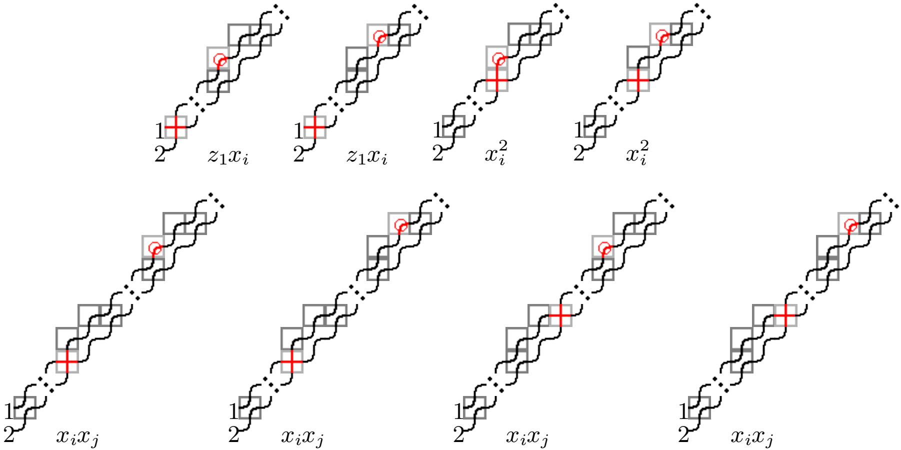
Пусть $w \in \mathcal{BC}_n$ и $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда

$$\mathfrak{C}^{[k]}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \sum_{D \in \mathrm{PD}^k_{\mathcal{C}_n}(w)} \mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)}$$

Аналогично типу B определяем множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{C}_n}(w)$ бесконечных приведенных c-pipe dreams данной формы $w \in \mathcal{BC}_n$ и получаем формулу

$$\mathfrak{C}_w(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{C}_n}(w)} \mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)}.$$

$w = 2\bar{1} = s_0 s_1 \in \mathcal{BC}_2$



$$\mathfrak{C}_{s_0 s_1} = 2z_1 \sum_i x_i + 2\sum_i x_i^2 + 4\sum_{i<j} x_i x_j = 2\left(z_1 p_1(\mathbf{x}) + p_1^2(\mathbf{x})\right).$$

База $B^k_{\mathcal{D}_n}$ состоит из блока-«лесенки» (диаграммы Юнга формы $(n-1,\dots,2,1)$) и k блоков-«уголков» (диаграммы Юнга формы $(n-1,1^{n-2})$). Блоки соединены коленами . В клетках с номером $1'$ размещаем колена , кресты , кресты с краном или колена с парой кранов . В остальных клетках размещаем кресты или колена . Назовем полученный объект d-pipe dream.

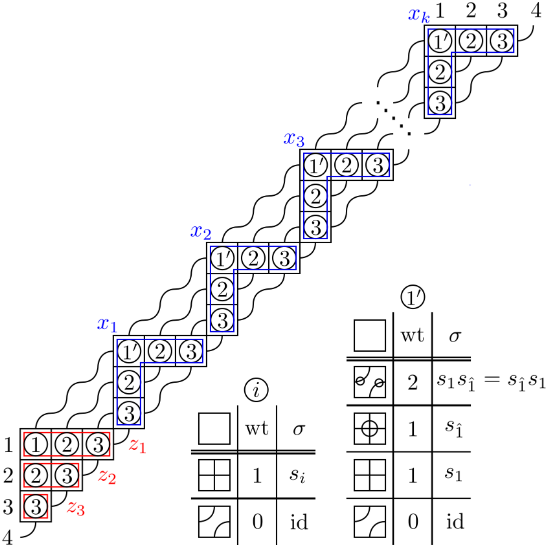


Рис.: База $B^k_{\mathcal{D}_4}$ для d-pipe dreams

Pipe dreams типа D

Каждой клетке $\square$ базы сопоставим

- вес $\mathrm{wt}(\square)$ элемента в ней. Он равен 2 для колен с парой кранов , 1 для крестов и крестов с краном и 0 для колен .
- ноль, одну или две буквы $\sigma(\square) \in \mathcal{D}_n$. Это s_i для в клетке с номером i, s_1 для в клетке с номером $1'$, $s_{\hat{1}}$ для , пара букв $s_1 s_{\hat{1}} = s_{\hat{1}} s_1$ для и id для .
- переменную $\mathrm{var}(\square)$. Она равна z_i для клетки в i-той строке лесенки и x_i для клетки в i-том уголке.

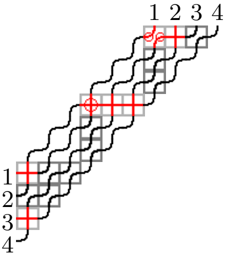
Pipe dreams типа D

Каждой клетке $\square$ базы сопоставим

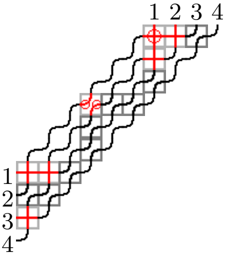
- вес $\mathrm{wt}(\square)$ элемента в ней. Он равен 2 для колен с парой кранов, 1 для крестов $+$ и крестов с краном и 0 для колен.
- ноль, одну или две буквы $\sigma(\square) \in \mathcal{D}_n$. Это s_i для $+$ в клетке с номером i, s_1 для $+$ в клетке с номером $1'$, $s_{\hat{1}}$ для, пара букв $s_1 s_{\hat{1}} = s_{\hat{1}} s_1$ для и id для.
- переменную $\mathrm{var}(\square)$. Она равна z_i для клетки в i-той строке лесенки и x_i для клетки в i-том уголке.

Каждому d-pipe dream D сопоставим:

- Моном $\mathbf{x}^{\alpha(D)}\mathbf{z}^{\beta(D)} = \prod_{\square \in B^k_{\mathcal{D}_n}} \mathrm{var}(\square)^{\mathrm{wt}(\square)}$
- Слова $\mathrm{word}_1(D), \ldots, \mathrm{word}_{2^{r(D)}}(D)$, получающиеся при выписывании букв $\sigma(\square)$ при чтении D справа налево сверху вниз. Здесь $r(D)$ — число элементов в D, слова отличаются порядком коммутирующих букв $s_1, s_{\hat{1}}$.
- Если $\mathrm{word}_1(D)$ — приведенное слово для $w \in \mathcal{D}_n$, то d-pipe dream D называется *приведенным формы* $w = w(D)$.

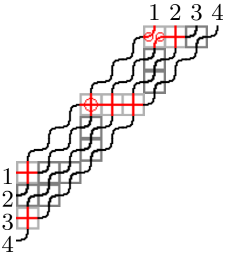
$D_1 =$ 

$$\mathbf{x}^{\alpha(D_1)}\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1 z_3 x_1^3 x_2^3$$

$D_2 =$ 

$$\mathbf{x}^{\alpha(D_2)}\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1^2 z_3 x_1^2 x_2^3$$

$D_1 =$

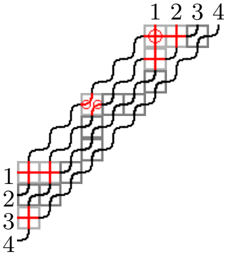


$$\mathbf{x}^{\alpha(D_1)}\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1 z_3 x_1^3 x_2^3$$

$$\mathrm{word}_1(D_1) = s_2 s_1 s_{\hat{1}} s_3 s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_3$$

$$\mathrm{word}_2(D_1) = s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_3 s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_3$$

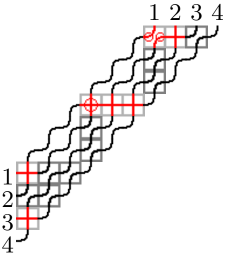
$D_2 =$



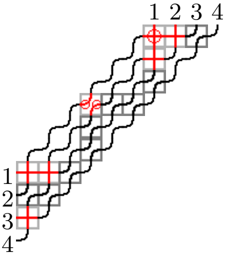
$$\mathbf{x}^{\alpha(D_2)}\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1^2 z_3 x_1^2 x_2^3$$

$$\mathrm{word}_1(D_2) = s_2 s_{\hat{1}} s_2 s_1 s_{\hat{1}} s_2 s_1 s_3$$

$$\mathrm{word}_2(D_2) = s_2 s_{\hat{1}} s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_2 s_1 s_3$$

$D_1 =$ 

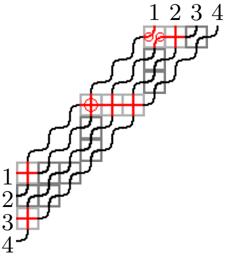
$$\mathbf{x}^{\alpha(D_1)}\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1 z_3 x_1^3 x_2^3$$
$$\mathrm{word}_1(D_1) = s_2 s_1 s_{\hat{1}} s_3 s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_3$$
$$\mathrm{word}_2(D_1) = s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_3 s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_3$$
$$w(D_1) = 1\bar{4}2\bar{3} \in \mathcal{D}_4$$

$D_2 =$ 

$$\mathbf{x}^{\alpha(D_2)}\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1^2 z_3 x_1^2 x_2^3$$
$$\mathrm{word}_1(D_2) = s_2 s_{\hat{1}} s_2 s_1 s_{\hat{1}} s_2 s_1 s_3$$
$$\mathrm{word}_2(D_2) = s_2 s_{\hat{1}} s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_2 s_1 s_3$$

D_2 — неприведенный

Pipe dreams типа D

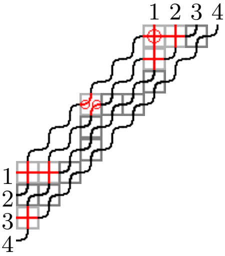
$D_1 =$ 

$$\mathbf{x}^{\alpha(D_1)}\mathbf{z}^{\beta(D_1)} = z_1 z_3 x_1^3 x_2^3$$

$$\mathrm{word}_1(D_1) = s_2 s_1 s_{\hat{1}} s_3 s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_3$$

$$\mathrm{word}_2(D_1) = s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_3 s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_3$$

$$w(D_1) = 1\bar{4}2\bar{3} \in \mathcal{D}_4$$

$D_2 =$ 

$$\mathbf{x}^{\alpha(D_2)}\mathbf{z}^{\beta(D_2)} = z_1^2 z_3 x_1^2 x_2^3$$

$$\mathrm{word}_1(D_2) = s_2 s_{\hat{1}} s_2 s_1 s_{\hat{1}} s_2 s_1 s_3$$

$$\mathrm{word}_2(D_2) = s_2 s_{\hat{1}} s_2 s_{\hat{1}} s_1 s_2 s_1 s_3$$

D_2 — неприведенный

В приведенном d-pipe dream каждая труба соединяет i слева с $(-1)^{c(i)} w(D)(i)$ сверху. Число $c(i)$ — число кранов на i-той трубе.

Приведенные pipe dreams типа D

Значимые элементы — все, кроме колен.

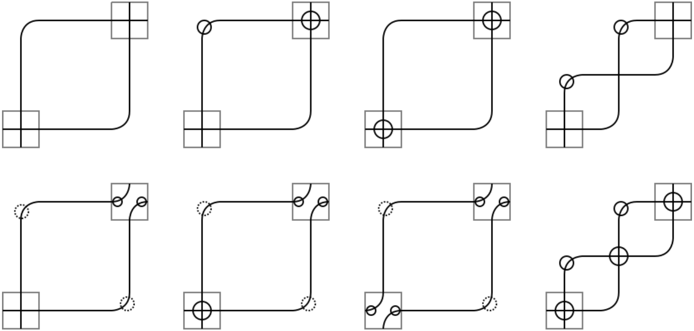
Неформально: d-pipe dream неприведенный, если в нем можно заменить некоторые значимые элементы на  с сохранением формы, и приведенный в противном случае.

Приведенные pipe dreams типа D

Значимые элементы — все, кроме колен.

Неформально: d-pipe dream неприведенный, если в нем можно заменить некоторые значимые элементы на  с сохранением формы, и приведенный в противном случае.

Формально: d-pipe dream неприведенный, если в нем встречается один из следующих 8 *запрещенных* шаблонов:



Эти шаблоны можно переворачивать. Наличие или отсутствие пунктирных кранов на соответствующих трубах роли не играет.

Обозначим множество всех приведенных d-pipe dreams данной формы $w \in \mathcal{D}_n$ в базе с k блоками-«уголками» через $\mathrm{PD}^k_{\mathcal{D}_n}(w)$.

Теорема

Пусть $w \in \mathcal{D}_n$ и $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда

$$\mathfrak{D}^{[k]}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \sum_{D \in \mathrm{PD}^k_{\mathcal{D}_n}(w)} \mathbf{x}^{\alpha(D)} \mathbf{z}^{\beta(D)}$$

Обозначим множество всех приведенных d-pipe dreams данной формы $w \in \mathcal{D}_n$ в базе с k блоками-«уголками» через $\mathrm{PD}^k_{\mathcal{D}_n}(w)$.

Теорема

Пусть $w \in \mathcal{D}_n$ и $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда

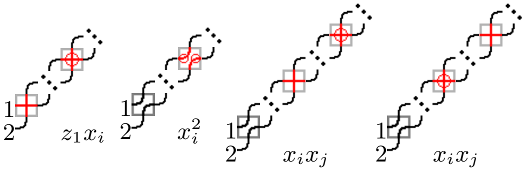
$$\mathfrak{D}^{[k]}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \sum_{D \in \mathrm{PD}^k_{\mathcal{D}_n}(w)} \mathbf{x}^{\alpha(D)} \mathbf{z}^{\beta(D)}$$

Аналогично типу B определяем множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{D}_n}(w)$ бесконечных приведенных d-pipe dreams данной формы $w \in \mathcal{D}_n$ и получаем формулу

$$\mathfrak{D}_w(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{D}_n}(w)} \mathbf{x}^{\alpha(D)} \mathbf{z}^{\beta(D)}.$$

Примеры

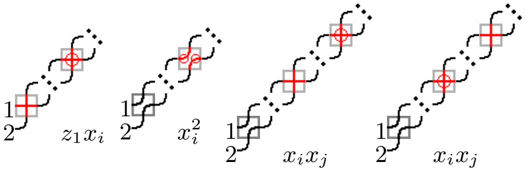
$w = \overline{12} = s_1 s_{\hat{1}} \in \mathcal{D}_2$



$$\mathfrak{D}_{s_1 s_{\hat{1}}} = z_1 \sum_i x_i + \sum_i x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j = z_1 p_1(\mathbf{x}) + p_1^2(\mathbf{x}).$$

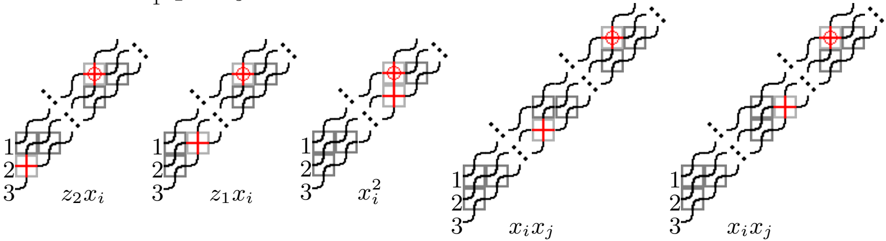
Примеры

$w = \overline{12} = s_1 s_{\hat{1}} \in \mathcal{D}_2$



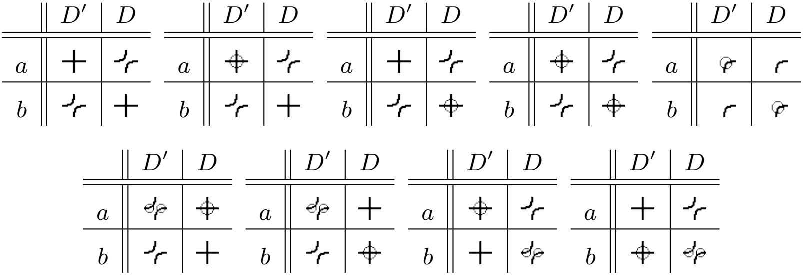
$$\mathfrak{D}_{s_1 s_{\hat{1}}} = z_1 \sum_i x_i + \sum_i x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j = z_1 p_1(\mathbf{x}) + p_1^2(\mathbf{x}).$$

$w = \overline{2}3\overline{1} = s_{\hat{1}} s_2 \in \mathcal{D}_3$



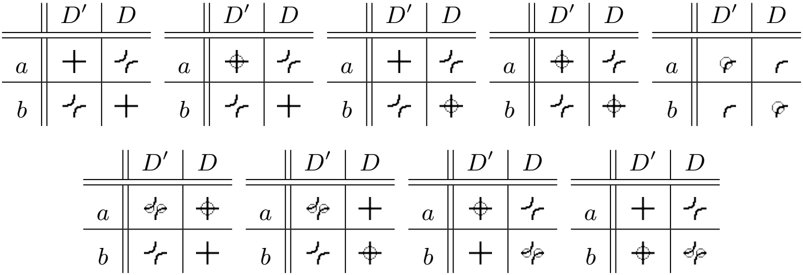
$$\mathfrak{D}_{s_{\hat{1}} s_2} = z_1 \sum_i x_i + z_2 \sum_i x_i + \sum_i x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j = (z_1 + z_2) p_1(\mathbf{x}) + p_1^2(\mathbf{x}).$$

Пусть D, D' — два приведенных pipe dream (любого типа) одинаковой формы w. Допустим, они отличаются только элементами в двух клетках: a и b (a выше b), причем эти элементы расположены одним из следующих девяти способов:



Тогда D получается из D' при помощи *допустимого движения* (пишем $D \succ D'$).

Пусть D, D' — два приведенных pipe dream (любого типа) одинаковой формы w. Допустим, они отличаются только элементами в двух клетках: a и b (a выше b), причем эти элементы расположены одним из следующих девяти способов:

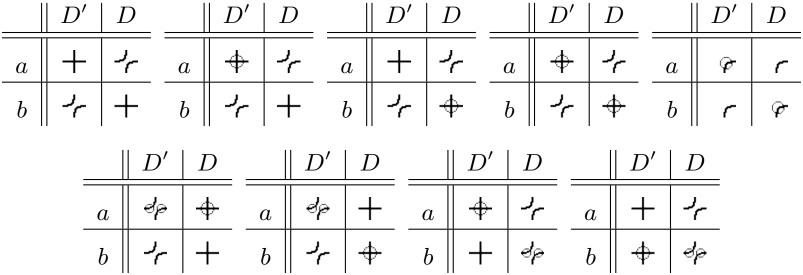


Тогда D получается из D' при помощи *допустимого движения* (пишем $D \succ D'$).

Неформально: допустимое движение опускает вниз какой-то значимый элемент в pipe dream D', сохраняя форму.

Допустимые движения на pipe dream

Пусть D, D' — два приведенных pipe dream (любого типа) одинаковой формы w. Допустим, они отличаются только элементами в двух клетках: a и b (a выше b), причем эти элементы расположены одним из следующих девяти способов:



Тогда D получается из D' при помощи *допустимого движения* (пишем $D \succ D'$).

Неформально: допустимое движение опускает вниз какой-то значимый элемент в pipe dream D', сохраняя форму.

Отношение $\succ$ можно продлить до частичного порядка на множестве приведенных pipe dreams данной формы.

Теорема

- Для любого $w \in \mathcal{S}_n$ множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$ содержит единственный pipe dream $D_b(w)$, в котором не встречается (т.е. в любой строке все кресты лежат левее всех колен). Такой pipe dream называется *нижним*.

Нижние a-pipe dreams

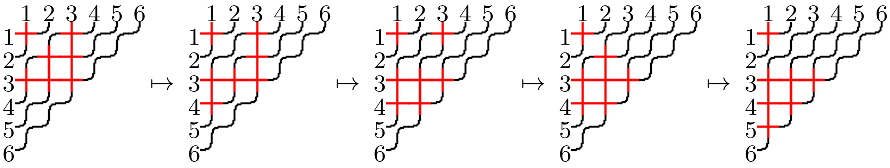
Теорема

- Для любого $w \in \mathcal{S}_n$ множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$ содержит единственный pipe dream $D_b(w)$, в котором не встречается (т.е. в любой строке все кресты лежат левее всех колен). Такой pipe dream называется *нижним*.
- Любой pipe dream $D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$ можно привести к $D_b(w)$ последовательностью допустимых движений. Таким образом, $D_b(w)$ — наибольший элемент относительно частичного порядка $\succ$.

Теорема

- Для любого $w \in \mathcal{S}_n$ множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$ содержит единственный pipe dream $D_b(w)$, в котором не встречается (т.е. в любой строке все кресты лежат левее всех колен). Такой pipe dream называется *нижним*.
- Любой pipe dream $D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$ можно привести к $D_b(w)$ последовательностью допустимых движений. Таким образом, $D_b(w)$ — наибольший элемент относительно частичного порядка $\succ$.

$$w = 216543 \in \mathcal{S}_6$$



Теорема

- Для любого $w \in \mathcal{BC}_n$ множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ содержит единственный *нижний* pipe dream $D_b(w)$, удовлетворяющий следующим условиям:
  - В $D_b(w)$ нет фрагментов  и .
  - Количество значимых элементов в блоках-уголках строго убывает с ростом номера блока (пока не станет нулевым).

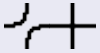
Нижние b- и c-pipe dreams

Теорема

- Для любого $w \in \mathcal{BC}_n$ множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ содержит единственный *нижний* pipe dream $D_b(w)$, удовлетворяющий следующим условиям:
  - В $D_b(w)$ нет фрагментов  и .
  - Количество значимых элементов в блоках-уголках строго убывает с ростом номера блока (пока не станет нулевым).

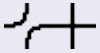
Нижние b- и c-pipe dreams

Теорема

- Для любого $w \in \mathcal{BC}_n$ множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ содержит единственный *нижний* pipe dream $D_b(w)$, удовлетворяющий следующим условиям:
  - В $D_b(w)$ нет фрагментов  и .
  - Количество значимых элементов в блоках-уголках строго убывает с ростом номера блока (пока не станет нулевым).

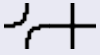
Нижние b- и c-pipe dreams

Теорема

- Для любого $w \in \mathcal{BC}_n$ множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ содержит единственный *нижний* pipe dream $D_b(w)$, удовлетворяющий следующим условиям:
  - В $D_b(w)$ нет фрагментов  и .
  - Количество значимых элементов в блоках-уголках строго убывает с ростом номера блока (пока не станет нулевым).
- Любой pipe dream $D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ можно привести к $D_b(w)$ последовательностью допустимых движений. Таким образом, $D_b(w)$ — наибольший элемент в $\mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ относительно частичного порядка $\succ$.

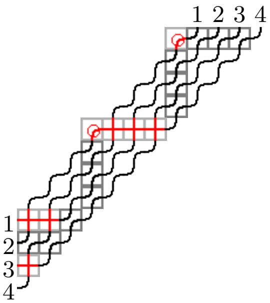
Нижние b- и c-pipe dreams

Теорема

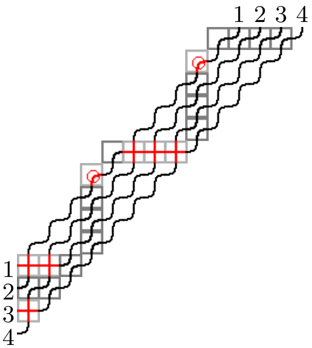
- Для любого $w \in \mathcal{BC}_n$ множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ содержит единственный *нижний* pipe dream $D_b(w)$, удовлетворяющий следующим условиям:
  - В $D_b(w)$ нет фрагментов  и .
  - Количество значимых элементов в блоках-уголках строго убывает с ростом номера блока (пока не станет нулевым).
- Любой pipe dream $D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ можно привести к $D_b(w)$ последовательностью допустимых движений. Таким образом, $D_b(w)$ — наибольший элемент в $\mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ относительно частичного порядка $\succ$.

Аналогичная теорема верна и для c-pipe dreams. Единственное изменение:  может встречаться у левых концов горизонтальных частей блоков-уголков, а колена с краном в $D_b(w)$ располагаются в их вертикальных частях.

Тип B



Тип C



$$w = 2\bar{4}3\bar{1} \in \mathcal{BC}_4$$

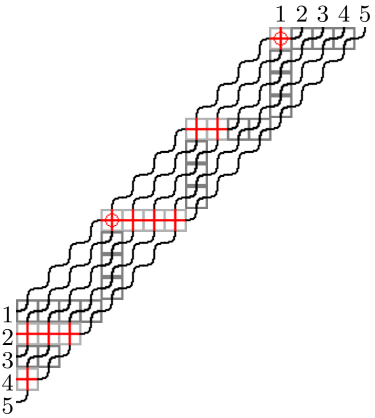
Теорема

- Для любого $w \in \mathcal{D}_n$ множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{D}_n}(w)$ содержит единственный *нижний* pipe dream $D_b(w)$, удовлетворяющий следующим условиям:
  - В $D_b(w)$ нет фрагментов (но может быть).
  - Количество значимых элементов в блоках-уголках строго убывает с ростом номера блока (пока не станет нулевым).
  - В клетках $1'$ непустых блоков-уголков стоят $+$ и , причем они чередуются: в блоках с нечетными номерами стоят , а в блоках с четными $+$.

Теорема

- Для любого $w \in \mathcal{D}_n$ множество $\mathrm{PD}_{\mathcal{D}_n}(w)$ содержит единственный *нижний* pipe dream $D_b(w)$, удовлетворяющий следующим условиям:
  - В $D_b(w)$ нет фрагментов (но может быть).
  - Количество значимых элементов в блоках-уголках строго убывает с ростом номера блока (пока не станет нулевым).
  - В клетках $1'$ непустых блоков-уголков стоят и , причем они чередуются: в блоках с нечетными номерами стоят , а в блоках с четными .
- Любой pipe dream $D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{D}_n}(w)$ можно привести к $D_b(w)$ последовательностью допустимых движений. Таким образом, $D_b(w)$ — наибольший элемент в $\mathrm{PD}_{\mathcal{D}_n}(w)$ относительно частичного порядка $\succ$.

Пример



$$w = \overline{5}4\overline{312} \in \mathcal{D}_5$$

Многочлены Шуберта как базис в кольце многочленов

Пусть $w \in \mathcal{S}_n$ и $D_b = D_b(w)$ — нижний pipe dream в $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$. Тогда моном $\mathbf{z}^{\beta(D_b)}$ — лексикографически старший в $\mathfrak{S}_w(\mathbf{z})$ относительно порядка переменных $z_{n-1} > \cdots > z_2 > z_1$.

Пусть $w \in \mathcal{S}_n$ и $D_b = D_b(w)$ — нижний pipe dream в $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$. Тогда моном $\mathbf{z}^{\beta(D_b)}$ — лексикографически старший в $\mathfrak{S}_w(\mathbf{z})$ относительно порядка переменных $z_{n-1} > \cdots > z_2 > z_1$.

Следствие

Многочлены Шуберта $\{\mathfrak{S}_w(\mathbf{z}) \mid w \in \mathcal{S}_\infty\}$ образуют базис в $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$.

Пусть $w \in \mathcal{S}_n$ и $D_b = D_b(w)$ — нижний pipe dream в $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$. Тогда моном $\mathbf{z}^{\beta(D_b)}$ — лексикографически старший в $\mathfrak{S}_w(\mathbf{z})$ относительно порядка переменных $z_{n-1} > \cdots > z_2 > z_1$.

Следствие

Многочлены Шуберта $\{\mathfrak{S}_w(\mathbf{z}) \mid w \in \mathcal{S}_\infty\}$ образуют базис в $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$.

Пусть $w \in \mathcal{BC}_n$ (или $w \in \mathcal{D}_n$) и $D_b = D_b(w)$ — нижний pipe dream в $\mathrm{PD}_{\mathcal{BC}_n}(w)$ (соотв. $\mathrm{PD}_{\mathcal{BC}_n}(w)$). Тогда моном $\mathbf{x}^{\alpha(D_b)}\mathbf{z}^{\beta(D_b)}$ — лексикографически старший в $\mathfrak{B}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ (соотв. в $\mathfrak{C}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ или $\mathfrak{D}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x})$) относительно порядка переменных $z_{n-1} > \cdots > z_2 > z_1 > x_1 > x_2 > \dots$.

Пусть $w \in \mathcal{S}_n$ и $D_b = D_b(w)$ — нижний pipe dream в $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$. Тогда моном $\mathbf{z}^{\beta(D_b)}$ — лексикографически старший в $\mathfrak{S}_w(\mathbf{z})$ относительно порядка переменных $z_{n-1} > \cdots > z_2 > z_1$.

Следствие

Многочлены Шуберта $\{\mathfrak{S}_w(\mathbf{z}) \mid w \in \mathcal{S}_\infty\}$ образуют базис в $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$.

Пусть $w \in \mathcal{BC}_n$ (или $w \in \mathcal{D}_n$) и $D_b = D_b(w)$ — нижний pipe dream в $\mathrm{PD}_{\mathcal{BC}_n}(w)$ (соотв. $\mathrm{PD}_{\mathcal{BC}_n}(w)$). Тогда моном $\mathbf{x}^{\alpha(D_b)}\mathbf{z}^{\beta(D_b)}$ — лексикографически старший в $\mathfrak{B}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ (соотв. в $\mathfrak{C}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ или $\mathfrak{D}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x})$) относительно порядка переменных $z_{n-1} > \cdots > z_2 > z_1 > x_1 > x_2 > \ldots$.

Лемма

Пусть $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Q}[p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), p_5(\mathbf{x}), \ldots]$ и $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_s^{\alpha_s}$ — старший моном в $f(\mathbf{x})$. Тогда $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots$.

Многочлены Шуберта как базис в кольце многочленов

Пусть $w \in \mathcal{S}_n$ и $D_b = D_b(w)$ — нижний pipe dream в $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$. Тогда моном $\mathbf{z}^{\beta(D_b)}$ — лексикографически старший в $\mathfrak{S}_w(\mathbf{z})$ относительно порядка переменных $z_{n-1} > \cdots > z_2 > z_1$.

Следствие

Многочлены Шуберта $\{\mathfrak{S}_w(\mathbf{z}) \mid w \in \mathcal{S}_\infty\}$ образуют базис в $\mathbb{Q}[\mathbf{z}]$.

Пусть $w \in \mathcal{BC}_n$ (или $w \in \mathcal{D}_n$) и $D_b = D_b(w)$ — нижний pipe dream в $\mathrm{PD}_{\mathcal{BC}_n}(w)$ (соотв. $\mathrm{PD}_{\mathcal{BC}_n}(w)$). Тогда моном $\mathbf{x}^{\alpha(D_b)}\mathbf{z}^{\beta(D_b)}$ — лексикографически старший в $\mathfrak{B}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ (соотв. в $\mathfrak{C}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ или $\mathfrak{D}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x})$) относительно порядка переменных $z_{n-1} > \cdots > z_2 > z_1 > x_1 > x_2 > \ldots$.

Лемма

Пусть $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Q}[p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), p_5(\mathbf{x}), \ldots]$ и $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_s^{\alpha_s}$ — старший моном в $f(\mathbf{x})$. Тогда $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots$.

Следствие

Каждое из трех семейств многочленов Шуберта $\{\mathfrak{B}_w \mid w \in \mathcal{BC}_\infty\}$, $\{\mathfrak{C}_w \mid w \in \mathcal{BC}_\infty\}$, $\{\mathfrak{D}_w \mid w \in \mathcal{D}_\infty\}$ образует базис в $\mathbb{Q}[\mathbf{z}, p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \ldots]$.

- Пусть $2 \le k \le n-1$. Перестановка $w \in \mathcal{S}_n$ называется *k-грассмановой*, если

$$w(1) < w(2) < \ldots < w(k) > w(k+1) < w(k+2) < \ldots < w(n)$$

Пример

- $w = 135624 \in \mathcal{S}_6$ — 4-грассманова перестановка.

Грассмановы перестановки

- Пусть $2 \leq k \leq n-1$. Перестановка $w \in \mathcal{S}_n$ называется *k-грассмановой*, если

$$w(1) < w(2) < \ldots < w(k) > w(k+1) < w(k+2) < \ldots < w(n)$$

- Перестановка $w \in \mathcal{BC}_n$ или $w \in \mathcal{D}_n$ называется *грассмановой*, если

$$w(1) < w(2) < \cdots < w(n).$$

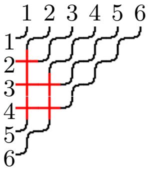
Пример

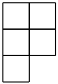
- $w = 135624 \in \mathcal{S}_6$ — 4-грассманова перестановка.
- $w = \overline{641}235 \in \mathcal{BC}_6$
  $w = \overline{6431}25 \in \mathcal{D}_6$ — грассмановы перестановки

Пусть $w \in \mathcal{S}_n$ — k-грассманова перестановка.

- В нижнем pipe dream $D_b(w)$ кресты расположены в позициях, соответствующих клеткам перевернутой диаграммы Юнга формы $\lambda(w)$.

$$w = 135624$$
$$\lambda(w) = (2, 2, 1, 0)$$

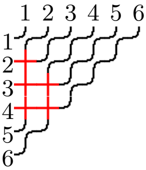


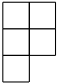


Пусть $w \in \mathcal{S}_n$ — k-грассманова перестановка.

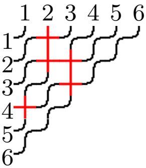
- В нижнем pipe dream $D_b(w)$ кресты расположены в позициях, соответствующих клеткам перевернутой диаграммы Юнга формы $\lambda(w)$.

$$w = 135624$$
$$\lambda(w) = (2, 2, 1, 0)$$





- Если $D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$, то приведем его к $D_b(w)$ допустимыми движениями. Запишем на месте каждого крестика в диаграмме Юнга число $k - i + 1$, если изначально крест был в строке i.



1	2
3	3
4	

- Обозначим через $\mathrm{SSYT}_\lambda(k)$ множество всех полустандартных таблиц Юнга формы λ, заполненных числами от 1 до k (напомним, что в таблице Юнга числа нестрого возрастают вдоль строк и строго возрастают вдоль столбцов).

- Обозначим через $\mathrm{SSYT}_\lambda(k)$ множество всех полустандартных таблиц Юнга формы λ, заполненных числами от 1 до k (напомним, что в таблице Юнга числа нестрого возрастают вдоль строк и строго возрастают вдоль столбцов).
- Как известно, многочлены Шура $s_\lambda(w)$ можно получить как сумму мономов по таблицам Юнга:

$$s_\lambda(z_1, \dots, z_k) = \sum_{T \in \mathrm{SSYT}_k(\lambda)} \mathbf{z}^T,$$

где $\mathbf{z}^T$ — произведение z_i по всем вхождениям i в T.

Многочлены Шуберта k-грассмановых перестановок

- Обозначим через $\mathrm{SSYT}_\lambda(k)$ множество всех полустандартных таблиц Юнга формы λ, заполненных числами от 1 до k (напомним, что в таблице Юнга числа нестрого возрастают вдоль строк и строго возрастают вдоль столбцов).
- Как известно, многочлены Шура $s_\lambda(w)$ можно получить как сумму мономов по таблицам Юнга:

$$s_\lambda(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{T \in \mathrm{SSYT}_k(\lambda)} \mathbf{z}^T,$$

где $\mathbf{z}^T$ — произведение z_i по всем вхождениям i в T.
- Мы установили биекцию между $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$ и $\mathrm{SSYT}_{\lambda(w)}(k)$ для k-грассмановой перестановки $w \in \mathcal{S}_n$. Если таблица T соответствует pipe dream D, то $\widetilde{\mathbf{z}}^T = \mathbf{z}^{\beta(D)}$ (здесь $\widetilde{\mathbf{z}} = (z_k, \ldots, z_2, z_1)$).

- Обозначим через $\mathrm{SSYT}_\lambda(k)$ множество всех полустандартных таблиц Юнга формы λ, заполненных числами от 1 до k (напомним, что в таблице Юнга числа нестрого возрастают вдоль строк и строго возрастают вдоль столбцов).
- Как известно, многочлены Шура $s_\lambda(w)$ можно получить как сумму мономов по таблицам Юнга:

$$s_\lambda(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{T \in \mathrm{SSYT}_k(\lambda)} \mathbf{z}^T,$$

где $\mathbf{z}^T$ — произведение z_i по всем вхождениям i в T.
- Мы установили биекцию между $\mathrm{PD}_{\mathcal{S}_n}(w)$ и $\mathrm{SSYT}_{\lambda(w)}(k)$ для k-грассмановой перестановки $w \in \mathcal{S}_n$. Если таблица T соответствует pipe dream D, то $\widetilde{\mathbf{z}}^T = \mathbf{z}^{\beta(D)}$ (здесь $\widetilde{\mathbf{z}} = (z_k, \ldots, z_2, z_1)$).

Теорема

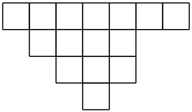
Пусть $w \in \mathcal{S}_n$ — k-грассманова перестановка, $\lambda(w)$ — соответствующее разбиение. Тогда

$$\mathfrak{S}_w\,(z_1, z_2, \ldots, z_k) = s_{\lambda(w)}(z_k, \ldots, z_2, z_1) = s_{\lambda(w)}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

P- и Q- функции Шура

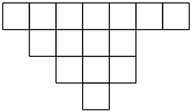
- Пусть $\mu = (\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_\ell > 0)$ — строго убывающее разбиение. Его можно изобразить в виде *сдвинутой диаграммы Юнга*:

$$\mu = (7, 4, 3, 1)$$



- Пусть $\mu = (\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_\ell > 0)$ — строго убывающее разбиение. Его можно изобразить в виде *сдвинутой диаграммы Юнга*:

$$\mu = (7, 4, 3, 1)$$



- Заполним сдвинутую диаграмму Юнга формы μ числами $1^\circ < 1 < 2^\circ < 2 < \ldots$ таким образом, что
  - Числа нестрого возрастают по строкам и по столбцам.
  - В каждой строке числа с кружками не повторяются.
  - В каждом столбце числа без кружков не повторяются.

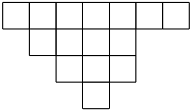
  Получается *кружковая таблица Юнга*.

1°	2°	2	2	3°	4	4
	2	3°	4°	4		
		3°	4	5		
			5°			

P- и Q- функции Шура

- Пусть $\mu = (\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_\ell > 0)$ — строго убывающее разбиение. Его можно изобразить в виде *сдвинутой диаграммы Юнга*:

$$\mu = (7, 4, 3, 1)$$



- Заполним сдвинутую диаграмму Юнга формы μ числами $1^\circ < 1 < 2^\circ < 2 < \ldots$ таким образом, что
  - Числа нестрого возрастают по строкам и по столбцам.
  - В каждой строке числа с кружками не повторяются.
  - В каждом столбце числа без кружков не повторяются.

  Получается *кружковая таблица Юнга*.

1°	2°	2	2	3°	4	4
	2	3°	4°	4		
		3°	4	5		
			5°			

- Множество всех кружковых таблиц формы μ обозначим за $\mathrm{CYT}(\mu)$. В подмножестве $\mathrm{CYT}'(\mu) \subset \mathrm{CYT}(\mu)$ содержатся такие таблицы, у которых в первой клетке каждой строки стоит число без кружка.

- Каждой кружковой таблице T можно сопоставить моном $\mathbf{x}^T$ — произведение переменных x_i по всех вхождениям i° и i в T.

- Каждой кружковой таблице T можно сопоставить моном $\mathbf{x}^T$ — произведение переменных x_i по всех вхождениям i° и i в T.
- *P- и Q-функции Шура* определяются как суммы мономов по кружковым таблицам Юнга:

$$Q_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \mathrm{CYT}(\mu)} \mathbf{x}^T, \qquad P_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \mathrm{CYT}'(\mu)} \mathbf{x}^T$$

- Каждой кружковой таблице T можно сопоставить моном $\mathbf{x}^T$ — произведение переменных x_i по всех вхождениям i° и i в T.
- *P- и Q-функции Шура* определяются как суммы мономов по кружковым таблицам Юнга:

$$Q_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \mathrm{CYT}(\mu)} \mathbf{x}^T, \qquad P_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \mathrm{CYT}'(\mu)} \mathbf{x}^T$$

- У первых чисел в строках можно ставить и убирать кружки произвольным образом. Поэтому $P_\mu(\mathbf{x}) = 2^{-\ell(\mu)} Q_\mu(\mathbf{x})$, где $\ell(\mu)$ — число чисел в μ.

- Каждой кружковой таблице T можно сопоставить моном $\mathbf{x}^T$ — произведение переменных x_i по всех вхождениям i° и i в T.
- *P- и Q-функции Шура* определяются как суммы мономов по кружковым таблицам Юнга:

$$Q_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \mathrm{CYT}(\mu)} \mathbf{x}^T, \qquad P_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \mathrm{CYT}'(\mu)} \mathbf{x}^T$$

- У первых чисел в строках можно ставить и убирать кружки произвольным образом. Поэтому $P_\mu(\mathbf{x}) = 2^{-\ell(\mu)} Q_\mu(\mathbf{x})$, где $\ell(\mu)$ — число чисел в μ.

Пример

Пусть $\mu = (2,1)$ и $i < j < k$ — произвольные натуральные числа. Перечислим кружковые таблицы Юнга из $\mathrm{CYT}'(\mu)$:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & i \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & j \\ \cline{2-2} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i & j^\circ \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & j \\ \cline{2-2} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i & j^\circ \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & k \\ \cline{2-2} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & k \\ \cline{2-2} \end{array}$$

$$P_{(2,1)}(\mathbf{x}) = \sum_{i<j} (x_i^2 x_j + x_i x_j^2) + 2 \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = \frac{1}{3} p_1^3(\mathbf{x}) - \frac{1}{3} p_3(\mathbf{x}),$$

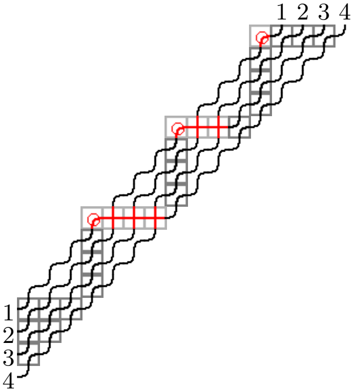
$$Q_{(2,1)}(\mathbf{x}) = 4 P_{(2,1)}(\mathbf{x}) = \frac{4}{3} p_1^3(\mathbf{x}) - \frac{4}{3} p_3(\mathbf{x}).$$

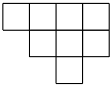
B-, C-, D- многочлены Шуберта и грассмановы перестановки

Пусть $w \in \mathcal{BC}_n$ — грассманова перестановка и $D_b(w) \in \mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n}(w)$ — соответствующий нижний pipe dream. В блоке-лестнице крестов нет, и значимым элементам в блоках-уголках можно сопоставить клеткам перевернутой сдвинутой диаграммы Юнга формы $\mu(w)$.

$$w = \overline{431}2$$

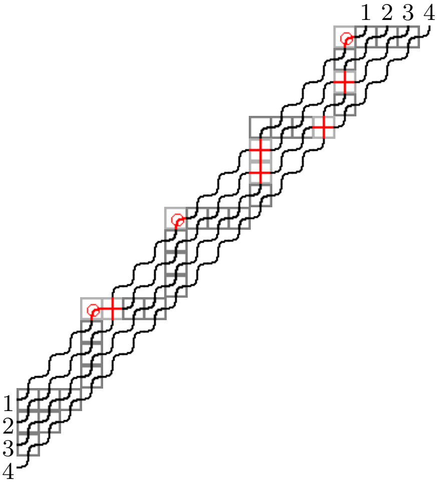
$$\mu(w) = (4, 3, 1, 0)$$





B-, C-, D-многочлены Шуберта и грассмановы перестановки

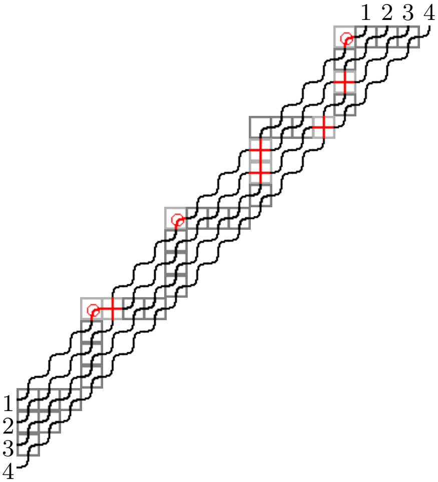
Приведем $D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n(w)}$ к $D_b(w)$ допустимыми движениями. Запишем на месте каждого крестика в сдвинутой диаграмме Юнга число i, если изначально крестик был в горизонтальной части i-того блока-уголка (включая угол), и i°, если в вертикальной.



1	1	3°	3
	2	3°	4°
		4	

B-, C-, D-многочлены Шуберта и грассмановы перестановки

Приведем $D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n(w)}$ к $D_b(w)$ допустимыми движениями. Запишем на месте каждого крестика в сдвинутой диаграмме Юнга число i, если изначально крестик был в горизонтальной части i-того блока-уголка (включая угол), и i°, если в вертикальной.
Это даст биекцию между $\mathrm{CYT}'(\mu(w))$ и $PD_{\mathcal{B}_n(w)}$, сохраняющую соответствующие мономы.



1	1	3°	3
	2	3°	4°
		4	

B-, C-, D-многочлены Шуберта и грассмановы перестановки

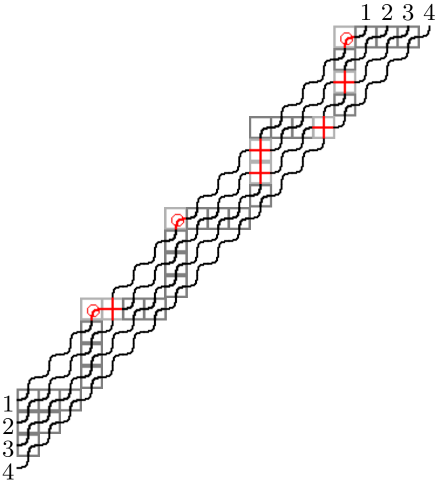
Приведем $D \in \mathrm{PD}_{\mathcal{B}_n(w)}$ к $D_b(w)$ допустимыми движениями. Запишем на месте каждого крестика в сдвинутой диаграмме Юнга число i, если изначально крестик был в горизонтальной части i-того блока-уголка (включая угол), и i°, если в вертикальной.
Это даст биекцию между $\mathrm{CYT}'(\mu(w))$ и $PD_{\mathcal{B}_n(w)}$, сохраняющую соответствующие мономы.

Теорема

Для грассмановых перестановок $w \in \mathcal{BC}_n$

$$\mathfrak{B}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = P_{\mu(w)}(\mathbf{x})$$

$$\mathfrak{C}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = Q_{\mu(w)}(\mathbf{x})$$



1	1	3°	3
	2	3°	4°
		4	

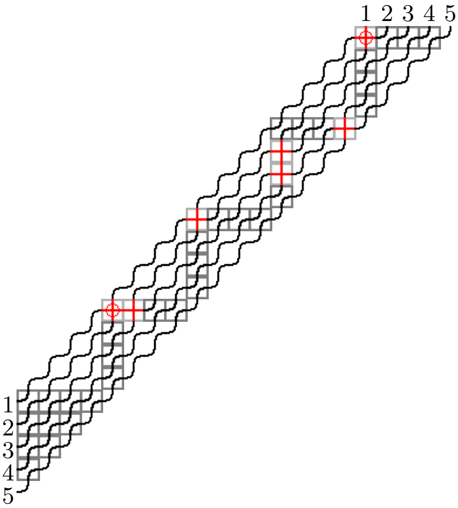
B-, C-, D-многочлены Шуберта и грассмановы перестановки

Аналогичная теорема верна и для типа D:

Теорема

Для грассмановых перестановок $w \in \mathcal{D}_n$

$$\mathcal{D}_w(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = P_{\mu(w)}(\mathbf{x})$$



$w = \overline{5}4\overline{2}1\overline{3} \in \mathcal{D}_5,$

1	1	3°	3
	2	3°	4°
		4	

Спасибо за внимание!