Пуассон-коммутативные подалгебры в $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$: Мищенко-Фоменко, Гельфанда-Цетлина и другие

Оксана Якимова

Institut für Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Москва, МГУ, 23.11.2020

Пусть $\mathfrak{q} = \mathrm{Lie}\, Q$ – комплексная алгебра Ли, $Q = Q^\circ$ – связная алгебраическая группа, $\mathcal{S}(\mathfrak{q}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{q}^*]$ – симметрическая алгебра алгебры $\mathfrak{q}$. Тогда на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ задана скобка Пуассона–Ли:

- $\{\xi, \eta\} = [\xi, \eta]$ при $\xi, \eta \in \mathfrak{q}$, продолжается на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ по правилу Лейбница;
- $\{F_1, F_2\}(\gamma) = \gamma([d_\gamma F_1, d_\gamma F_2])$, если $F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$, $\gamma \in \mathfrak{q}^*$;
- $\{\mathsf{f} + \mathcal{U}_a(\mathfrak{q}), \mathsf{h} + \mathcal{U}_b(\mathfrak{q})\} = [\mathsf{f}, \mathsf{h}] + \mathcal{U}_{a+b}(\mathfrak{q})$, если $\mathsf{f} \in \mathcal{U}_{a+1}(\mathfrak{q})$ и $\mathsf{h} \in \mathcal{U}_{b+1}(\mathfrak{q})$.

Третье определение скобки использует каноническую фильтрацию на $\mathcal{U}(\mathfrak{q})$ и тот факт, что $\mathcal{S}(\mathfrak{q}) \cong \mathrm{gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{q})$.

Определение

Подалгебра $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ называется Пуассон-коммутативной, если $\{A, A\} = 0$.

$$\{\mathsf{f}+\mathcal{U}_a(\mathfrak{q}),\mathsf{h}+\mathcal{U}_b(\mathfrak{q})\}=[\mathsf{f},\mathsf{h}]+\mathcal{U}_{a+b}(\mathfrak{q}),\ \text{ если }\ \mathsf{f}\in\mathcal{U}_{a+1}(\mathfrak{q})\ \text{ и }\ \mathsf{h}\in\mathcal{U}_{b+1}(\mathfrak{q}).$$

Соответственно, если подалгебра $C\subset\mathcal{U}(\mathfrak{q})$ коммутативна, то $\mathrm{gr}(C)\subset\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ Пуассон-коммутативна. Также возникает обратная задача.

Проблема квантования. Пусть дана Пуассон-коммутативная подалгебра $A\subset\mathcal{S}(\mathfrak{q})$. Существует ли такая коммутативная подалгебра $\widetilde{A}\subset\mathcal{U}(\mathfrak{q})$, что $A=\mathrm{gr}(\widetilde{A})$?

Индекс алгебры Ли и симплектические формы

Линейная функция $\gamma \in \mathfrak{q}^*$ задает кососимметрическую форму $\hat{\gamma}$ на $\mathfrak{q}$ по формуле

$$\hat{\gamma}(\xi,\eta) = \gamma([\xi,\eta]) \text{ для любых } \xi,\eta \in \mathfrak{q}.$$

Пусть $\mathfrak{q}_\gamma = \operatorname{Lie} Q_\gamma = \ker\hat{\gamma}$ – стабилизатор точки γ. Форма $\hat{\gamma}$ невырождена на $\mathfrak{q}^*/\mathfrak{q}_\gamma \cong T^*_\gamma(Q\gamma)$.

Число $\operatorname{ind}\mathfrak{q} = \min\limits_{\gamma\in\mathfrak{q}^*} \dim\mathfrak{q}_\gamma = \dim\mathfrak{q} - \max_{\gamma\in\mathfrak{q}^*} \dim(Q\gamma)$ называется *индексом* алгебры $\mathfrak{q}$.

Положим $\mathfrak{q}^*_{\mathrm{reg}} = \{\gamma\in\mathfrak{q}^* \mid \dim\mathfrak{q}_\gamma = \operatorname{ind}\mathfrak{q}\}$, $\mathfrak{q}^*_{\mathrm{sing}} = \mathfrak{q}^*\setminus\mathfrak{q}^*_{\mathrm{reg}}$,

$$\boldsymbol{b}(\mathfrak{q}) = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{q} + \operatorname{ind}\mathfrak{q}) = \frac{1}{2}\max_{\gamma\in\mathfrak{q}^*}\operatorname{rk}\hat{\gamma} + \operatorname{ind}\mathfrak{q}.$$

Заметим, что $\boldsymbol{b}(\mathfrak{q}) \in \mathbb{Z}$, так как $\operatorname{rk}\hat{\gamma} = \dim(Q\gamma)$ чётное число.

$\{F_1, F_2\}(\gamma) = \gamma([d_\gamma F_1, d_\gamma F_2]) = \hat{\gamma}(d_\gamma F_1, d_\gamma F_2)$, если $F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$, $\gamma \in \mathfrak{q}^*$.

Для $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ положим $d_\gamma A := \langle d_\gamma F \mid F \in A \rangle_{\mathbb{C}}$.

Предположим $\{A, A\} = 0$, тогда

1. $\hat{\gamma}(d_\gamma A, d_\gamma A) = 0$ и следовательно
2. $\dim d_\gamma A \leqslant \frac{1}{2}\dim(Q\gamma) + \dim \mathfrak{q}_\gamma$.
3. Поэтому tr.deg $A \leqslant \boldsymbol{b}(\mathfrak{q})$.
4. Кроме того, $A|_{Q\gamma}$ – Пуассон-коммутативная подалгебра.

Определение

Пуассон-коммутативная подалгебра $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ *полна* на орбите $Q\gamma$, если tr.deg $(A|_{Q\gamma}) = \frac{1}{2}\dim(Q\gamma)$.

Как было отмечено, $\operatorname{tr.deg} A \leqslant \boldsymbol{b}(\mathfrak{q})$ для любой Пуассон-коммутативной подалгебры $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$.

Замечания

1. Если $\dim \mathfrak{q} < \infty$, то существует такая Пуассон-коммутативная подалгебра $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$, что $\operatorname{tr.deg} A = \boldsymbol{b}(\mathfrak{q})$ – гипотеза Мищенко-Фомеко, доказанная Садэтовым.
2. Согласно результату Боро и Крафта, $\operatorname{tr.deg} C \leqslant \boldsymbol{b}(\mathfrak{q})$ для любой коммутативной подалгебры $C \subset \mathcal{U}(\mathfrak{q})$. Опять таки, всегда существует коммутативная подалгебра, для которой выполнено равенство (О.Я. 2020).
3. Если $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ Пуассон-коммутативна и $\operatorname{tr.deg} A = \boldsymbol{b}(\mathfrak{q})$, то A полна на орбите общего положения.

Неформальный вывод: *интересно изучать Пуассон-коммутативные подалгебры максимальной степени трансцендентности*.

Симметрические инварианты

Рассмотрим алгебру $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}} = \mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \{H \mid \{\mathfrak{q}, H\} = 0\} = \mathbb{C}[\mathfrak{q}^*]^Q$. Как алгебра и как Q-модуль она изоморфна центру $\mathcal{Z}\mathcal{U}(\mathfrak{q}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{q})$. Многие конструкции Пуассон-коммутативных подалгебр используют $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$.

Всегда $\operatorname{tr.deg} \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}} \leqslant \operatorname{ind} \mathfrak{q}$. Будем предполагать, что $\operatorname{tr.deg} \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}} = \operatorname{ind} \mathfrak{q}$. (Это довольно безобидное условие, если инвариантов не хватает, можно взять полуинварианты.)

Если $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$ редуктивна, то $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \operatorname{rk} \mathfrak{g} =: \ell$ и $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[H_1, \ldots, H_\ell]$, где многочлены H_i однородны и алгебраически независимы.

Напомним также, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$.

Подалгебры Мищенко-Фоменко, сдвиги инвариантов

МФ-подалгебра ассоциированная с $\gamma \in \mathfrak{q}^*$

Пусть $\mathcal{F}_\gamma = \mathsf{alg}\langle \partial_\gamma^k H \mid H \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}, k \geqslant 0 \rangle$. Тогда $\{\mathcal{F}_\gamma, \mathcal{F}_\gamma\} = 0$.

Утверждение (Болсинов)

Если $\dim \mathfrak{q}^*_{\mathrm{sing}} \leqslant \dim \mathfrak{q} - 2$ и $\gamma \in \mathfrak{q}^*_{\mathrm{reg}}$, то $\mathrm{tr.deg}\, \mathcal{F}_\gamma = \boldsymbol{b}(\mathfrak{q})$.

В частности, утверждение применимо к редуктивным алгебрам, где $\dim \mathfrak{q}^*_{\mathrm{sing}} \leqslant \dim \mathfrak{q} - 3$. Впрочем, в редуктивном случае, для регулярной полупростой точки этот результат впервые получен в работе Мищенко и Фоменко (1978).

Новые результаты о полноте МФ-подалгебр

Рассмотрим редуктивную алгебру $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$.

Теорема (Д. Панюшев-О.Я., 2020)

(i) *Если* $\gamma \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}$, *то* $\mathcal{F}_\gamma$ *полна на любой замкнутой и любой регулярной орбите.*

(ii) *Существует такая регулярная точка* γ, *что* $\mathcal{F}_\gamma$ *полна на любой орбите.*

Идеи доказательства (ii).

– Орбита $G\gamma \subset \mathfrak{g}^*$ называется <u>нильпотентной</u>, если $0 \in \overline{G\gamma}$.

– Если однородная Пуассон-коммутативная подалгебра $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ полна на каждой нильпотентной орбите, то она полна на любой орбите (процедура стягивания).

– Имеется лишь конечное число нильпотентных орбит в $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$.

Согласованные скобки Пуассона

Определение

Две скобки Пуассона на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ *согласованы*, если любая их линейная комбинация снова является скобкой Пуассона. (Достаточно проверить для суммы.)

Пример. С точкой $\gamma \in \mathfrak{q}^*$ связана скобка $\{\ ,\ \}_\gamma$, для которой

$$\{\xi, \eta\}_\gamma = \gamma([\xi, \eta]), \text{ если } \xi, \eta \in \mathfrak{q}.$$

Скобки $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_\gamma$ согласованы.

По двум согласованным скобкам строится Пуассон-коммутативная подалгебра по “схеме Ленарда-Магри". Именно так и получаются МФ-подалгебры.

Допустим, что $\{\ ,\ \}_t = \{\ ,\ \}_I + t\{\ ,\ \}_{II}$ при $t \in \mathbb{C}$ и $\{\ ,\ \}_\infty = \{\ ,\ \}_{II}$ порождают 2-мерный пучок согласованных скобок.

Пусть π_t $(t \in \mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ – это тензор Пуассона (бивектор) скобки $\{\ ,\ \}_t$, то есть,

$$\pi_t(dF \wedge dH) = \{F, H\}_t, \text{ если } F, H \in \mathcal{S}(\mathfrak{q}).$$

Тогда $\pi_t(\gamma) = \hat{\gamma}$.

Положим $\operatorname{rk} \pi_t = \max\limits_{\gamma \in \mathfrak{q}^*} \operatorname{rk} \pi_t(\gamma)$, $\mathbb{P}_{\text{reg}} = \{t \in \mathbb{P} \mid \operatorname{rk} \pi_t \geqslant \operatorname{rk} \pi_{t'}\ \forall t' \in \mathbb{P}\}$.

Алгебра $\mathcal{A} = \mathsf{alg}\langle \mathcal{Z}_t = \mathcal{ZS}(\mathfrak{q}, \{\ ,\ \}_t) \mid t \in \mathbb{P}_{\text{reg}}\rangle$ Пуассон-коммутативна относительно любой из скобок $\{\ ,\ \}_t$.

Выбор второй скобки

Пусть $\{\ ,\ \}_I$ – это обычная скобка Пуассона-Ли на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$. В качестве $\{\ ,\ \}_{II}$ можно взять:

- $\{\ ,\ \}_\gamma$, $\gamma \in \mathfrak{q}^*$ (скобка степени ноль, случай Мищенко-Фоменко);
- некоторую линейную скобку, то есть, другую структуру алгебры Ли на пространстве $\mathfrak{q}$, например,
  - если $\mathfrak{q} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$, где $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{r}$ подалгебры Ли, то $\{\ ,\ \}_I$ стягивается к скобке алгебры $\mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{r}^{\mathrm{ab}}$, согласованной с первой,
  - если $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \oplus \mathfrak{q}_1$ – это $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировка (симметрическое разложение), то $\{\ ,\ \}_I$ стягивается к скобке алгебры $\mathfrak{q}_0 \ltimes \mathfrak{q}_1^{\mathrm{ab}}$,
  - аналогичная конструкция приводит к согласованной скобке в случае автоморфизма любого конечного порядка m (то есть, при наличии $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуировки),

  полная классификация неизвестна;
- скобку большей степени (наука разрабатывается).

Подробнее об инволюциях

Пусть $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \oplus \mathfrak{q}_1$ – это $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировка (симметрическое разложение), $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}_0$. Тогда $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}^\sigma$ для некоторой инволюции $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{q})$ и $\sigma|_{\mathfrak{q}_1} = -\mathrm{id}_{\mathfrak{q}_1}$.

Несколько изменив обозначения, разложим скобку $\{\ ,\ \}$ как

$$\{\ ,\ \} = \underbrace{\{\ ,\ \}_{0,0} + \{\ ,\ \}_{0,1}}_{\{\ ,\ \}_I} + \{\ ,\ \}_{1,1}, \quad \text{где } \{\ ,\ \}_{1,1} = \{\ ,\ \}_{II} = \{\ ,\ \}_\infty$$

и $\{\ ,\ \}_{i,j} = [\ ,\ ]_{i,j} : \mathfrak{q}_i \times \mathfrak{q}_j \to \mathfrak{q}_{i+j}$ для $i, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{0, 1\}$.

Согласно общему методу, алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathfrak{q}, \sigma) = \mathsf{alg}\langle \mathcal{Z}_t \mid t \in \mathbb{P}_{\mathrm{reg}} \rangle$ Пуассон-коммутативна.

Заметим, что $(\mathcal{S}(\mathfrak{q}), \{\ ,\ \}_t) \cong (\mathcal{S}(\mathfrak{q}), \{\ ,\ \})$ при $t \neq 0, \infty$ и следовательно $\mathbb{C}^\times \subset \mathbb{P}_{\mathrm{reg}}$. Также отметим то, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}_0}$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ – симметрическое разложение редуктивной алгебры $\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^\sigma$. Положим $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathfrak{g}, \sigma)$. Напомним, что $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$ и что $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_0}$.

Теорема (Д. Панюшев-О.Я.)

Имеем $\operatorname{tr.deg} \mathcal{A} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}_1 + \operatorname{rk} \mathfrak{g} + \operatorname{rk} \mathfrak{g}_0)$.

Для сравнения:

Предложение (А. Молев-О.Я.)

Для любой подалгебры Ли $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{q}$ и любой Пуассон-коммутативной подалгебры $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{l}}$ выполнено $\operatorname{tr.deg} A \leqslant \boldsymbol{b}(\mathfrak{q}) - \boldsymbol{b}(\mathfrak{l}) + \operatorname{ind} \mathfrak{l}$.

Если $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0$, то $\operatorname{tr.deg} A \leqslant \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}_1 + \operatorname{rk} \mathfrak{g} + \operatorname{rk} \mathfrak{g}_0)$. Поэтому $\mathcal{A}$ имеет максимально возможную[1] степень трансцендентности.

[1] для подалгебры лежащей в $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_0}$

Образующие алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathfrak{g}, \sigma)$

Пример

Рассмотрим $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 = \langle e, h, f\rangle_{\mathbb{C}}$. В этом случае $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_2 = \mathbb{C}h$ и $\mathcal{A} = \mathbb{C}[ef, h] = \mathcal{F}_h$.

Для $t \neq 0, \infty$ положим $s = \sqrt{t}$, $\varphi_s \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\varphi_s|_{\mathfrak{g}_0} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_0}, \varphi_s|_{\mathfrak{g}_1} = s{\cdot}\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_1}$.
Тогда $[\xi, \eta]_t = \{\xi, \eta\}_t = \varphi_s^{-1}(\{\varphi_s(\xi), \varphi_s(\eta)\})$. Так получаются изоморфизм $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]) \cong (\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_t)$ и равенство $\mathcal{Z}_t = \varphi_s^{-1}(\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}})$ при $t \neq 0, \infty$.

В семействе $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_t)$ есть две выделенные точки, 0 и ∞.
В нуле имеем $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_0) \cong \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1^{\mathrm{ab}}$. Здесь $\mathrm{ind}\,(\mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1^{\mathrm{ab}}) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ и $0 \in \mathbb{P}_{\mathrm{reg}}$.

В дальнейшем будем предполагать, что симметрическая пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ неразложима и что $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_2$. Тогда $\infty \notin \mathbb{P}_{\mathrm{reg}}$.

Вывод: $\mathcal{A} = \mathrm{alg}\langle \varphi_s(\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}), \mathcal{Z}_0 \mid s \in \mathbb{C}^{\times}\rangle$.

$\mathcal{A} = \mathrm{alg}\langle \varphi_s(\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}), \mathcal{Z}_0 \mid s \in \mathbb{C}^\times \rangle.$

Далее $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[H_1, \ldots, H_\ell]$, где $\ell = \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ и каждый многочлен H_i однороден. Отметим, что $\sum_{i=1}^{\ell} \deg H_i = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$. Без ограничения общности, $\sigma(H_i) = \pm H_i$. Разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ определяет биградуировку $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) = \sum_{k,p} \mathcal{S}^k(\mathfrak{g}_0)\mathcal{S}^p(\mathfrak{g}_1)$. Положим $d_i = \deg H_i$, $d_i^\bullet = \deg_{\mathfrak{g}_1} H_i$. Тогда:

$$H_i = (H_i)_{(d_i - d_i^\bullet, d_i^\bullet)} + (H_i)_{(d_i - d_i^\bullet + 2, d_i^\bullet - 2)} + \ldots + (H_i)_{(d_i - \varepsilon(i), \varepsilon(i))}$$

биоднородное разложение, причём $\varepsilon(i) \in \{0, 1\}$ и $\sigma(H_i) = (-1)^{\varepsilon(i)} H_i$. Здесь $\varphi_s((H_i)_{(d_i - p, p)}) = s^p (H_i)_{(d_i - p, p)}$. Положим $H_i^\bullet = (H_i)_{(d_i - d_i^\bullet, d_i^\bullet)}$.

Утверждение

Имеем $H_i^\bullet \in \mathcal{Z}_0$.

Определение

Назовём инволюцию *хорошей*, если существует такой набор образующих H_i, что $\sigma(H_i) = \pm H_i$ и $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{C}[H_1^\bullet, \ldots, H_\ell^\bullet]$.

Теорема (Д. Панюшев-О.Я.)

Если инволюция хорошая и $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{C}[H_1^\bullet, \ldots, H_\ell^\bullet]$, *то биоднородные компоненты* $(H_j)_{(d_j-d_j^\bullet, d_j^\bullet)}$, $(H_j)_{(d_j-d_j^\bullet+2, d_j^\bullet-2)}$, $\ldots$, $(H_j)_{(d_j-\varepsilon(j), \varepsilon(j))}$ *свободно порождают алгебру* $\mathcal{A}$.

Идея доказательства (ii).

– Пересчитать компоненты.

Почти все инволюции хорошие. Существует 4 исключения, это инволюции особых алгебр типа E.

В дальнейшем будем считать, что σ хорошая.
Число ненулевых компонент вида $(H_j)_{(d_j,0)} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_0)$ равно $\operatorname{rk}\mathfrak{g}_0$. Если заменить их на образующие $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_0)^{\mathfrak{g}_0}$, алгебра останется свободной.
Точнее, $\boldsymbol{A} = \mathrm{alg}\langle \mathcal{A}, \mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{g}_0)\rangle$ свободна, Пуассон-коммутативна и $\mathrm{tr.deg}\, \boldsymbol{A} = \mathrm{tr.deg}\, \mathcal{A}$. Более того, $\boldsymbol{A}$ *максимальна* (является максимальной по включению Пуассон-коммутативной подалгеброй в $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}_0}$).

Приложения конструкции $\boldsymbol{A}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0)=\mathrm{alg}\langle\mathcal{A},\mathcal{ZS}(\mathfrak{g}_0)\rangle$

Пусть дана цепочка симметрических подалгебр

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(0)\supset\mathfrak{g}(1)\supset\mathfrak{g}(2)\supset\ldots\supset\mathfrak{g}(m),$$

где все инволюции хорошие и $\mathfrak{g}(m)$ абелева. Положим

$$\mathcal{C}=\mathrm{alg}\langle\boldsymbol{A}(\mathfrak{g}(k),\mathfrak{g}(k+1))\mid 0\leqslant k<m\rangle.$$

Тогда $\{\mathcal{C},\mathcal{C}\}=0$, $\mathrm{tr.deg}\,C=\boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{C}$ свободна и максимальна.

Самый знаменитый пример

В качестве $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ возьмём либо $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{gl}_{n-1})$, либо $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})$. Возникнут две цепочки вида

$$\begin{array}{rl} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}(0) \supset \mathfrak{g}(1) \supset \mathfrak{g}(2) \supset \ldots \supset \mathfrak{g}(m) : \\ (1) & \mathfrak{sl}_n \supset \mathfrak{gl}_{n-1} \supset \ldots \supset \mathfrak{gl}_2 \supset \mathfrak{gl}_1, \\ (2) & \mathfrak{so}_n \supset \mathfrak{so}_{n-1} \supset \ldots \supset \mathfrak{so}_3 \supset \mathfrak{so}_2. \end{array}$$

По ним строятся коммутативные подалгебры, подалгебры Гельфанда-Цетлина $\widetilde{\mathcal{C}} = \mathcal{GT}(\mathfrak{g}) = \mathrm{alg}\,\langle \mathcal{ZU}(\mathfrak{g}(k)) \mid 0 \leqslant k \leqslant m \rangle \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Здесь $\mathcal{C} = \mathrm{gr}(\widetilde{\mathcal{C}})$.

Для любого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля V_λ его ограничение на $\mathfrak{g}_0$ свободно от кратностей. Это приводит к конструкции базиса Гельфанда-Цетлина, состоящего из собственных векторов алгебры $\widetilde{\mathcal{C}}$.

Изучение геометрических свойств алгебр $\mathcal{C} = \mathrm{gr}(\mathcal{GT}(\mathfrak{g}))$ началось в работах:
Guillemin–Sternberg, 1983,

- The Gelfand–Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds,
- On collective complete integrability according to the method of Thimm,

для вещественных (компактных) аналогов.

Некоторые результаты о полноте на орбитах $G\beta \subset \mathfrak{g}^*$.

- ▷ $\mathrm{tr.deg}(\mathcal{C}|_{G\beta}) = \frac{1}{2}\dim(G\beta)$, если $G\beta$ замкнута, Guillemin–Sternberg, 1983.
- ▷ $\mathrm{tr.deg}(\mathcal{C}|_{G\beta}) = \frac{1}{2}\dim(G\beta)$, если $\dim(G\beta) = \dim\mathfrak{g} - \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ (регулярный случай), Kostant–Wallach (2006) для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$; Colarusso–Evens (2018) для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$.
- ▷ $\mathrm{tr.deg}(\mathcal{C}|_{G\beta}) = \frac{1}{2}\dim(G\beta)$ $\forall\beta \in \mathfrak{g}^*$, Д. Панюшев-О.Я., 2020.

Vinberg's quantisation problem for MF-subalgebras (1991):
find a commutative $\widetilde{F} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ such that $\mathrm{gr}(\widetilde{F}) = \mathcal{F}_\gamma$.

Solutions of Vinberg's problem:

- 1996, M. Nazarov and G. Olshanski, via Bethe subalgebras of Yangians,
  - ▷ $\mathfrak{g}$ is any classical Lie algebra, $\gamma \in \mathfrak{g}$ is regular semisimple,
  - ▷ the story "MF-subalgebras and Yangians" goes on;
- 2000, A. Tarasov, using the symmetrisation map $\varpi\colon \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$,
  - ▷ $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, γ is regular semisimple;
- 2006, L. Rybnikov, using the *Feigin–Frenkel centre*,
  - ▷ Boris Feigin and Edward Frenkel,
  - ▷ $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \subset \mathcal{U}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])^{\mathfrak{g}}$, commutative subalgebra, the *centre of the universal affine vertex algebra associated with $\widehat{\mathfrak{g}}$ at the critical level*,
  - ▷ for $\gamma \in \mathfrak{g}^*$ and $z \in \mathbb{C}^\times$, the map $\varrho_{\gamma,z}\colon \mathcal{U}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ with $\xi t^r \mapsto \xi z^r + \delta_{r,-1}\gamma(\xi)$ is a G_γ-equivariant homomorphism,
  - ▷ $\widetilde{\mathfrak{F}}_\gamma = \mathrm{Im}\,\varrho_{\gamma,z} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ is commutative and it does not depend on z,
  - ▷ Thm. $\mathcal{F}_\gamma \subset \mathrm{gr}(\widetilde{\mathfrak{F}}_\gamma)$ and for regular semisimple γ, $\mathcal{F}_\gamma = \mathrm{gr}(\widetilde{\mathfrak{F}}_\gamma)$.

Quantisation of singular MF-subalgebras

Construction of L. Rybnikov

The FF-centre $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \subset \mathcal{U}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])^{\mathfrak{g}}$ is mapped into $\widetilde{\mathfrak{F}}_\gamma \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G_\gamma}$ by $\xi t^r \mapsto \xi z^r + \delta_{r,-1}\gamma(\xi)$, $\widetilde{\mathfrak{F}}_\gamma$ is commutative and $\mathcal{F}_\gamma \subset \mathrm{gr}(\widetilde{\mathfrak{F}}_\gamma) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g})$.

If $\mathcal{F}_\gamma$ is a maximal Poisson-commutative subalgebra of $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, by Tarasov and Panyushev–Y. (2008), this is the case for $\gamma \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}$, then $\mathcal{F}_\gamma = \mathrm{gr}(\widetilde{\mathfrak{F}}_\gamma)$.

Feigin–Frenkel–Toledano Loredo (2010) proved independently that $\mathcal{F}_\gamma = \mathrm{gr}(\widetilde{\mathfrak{F}}_\gamma)$ for each $\gamma \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}$ and conjectured that

$$\mathcal{F}_\gamma = \mathrm{gr}(\widetilde{\mathfrak{F}}_\gamma) \ \text{ for each } \ \gamma \in \mathfrak{g}^*.$$

Теорема (A. Molev–O.Y.)

We have tr.deg $\mathcal{F}_\gamma = \ell + \frac{1}{2}\dim(G\gamma) = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}) - \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}_\gamma) + \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}_\gamma$.

The inclusion $\mathcal{F}_\gamma \subset \mathrm{gr}(\widetilde{\mathfrak{F}}_\gamma)$ *is an algebraic extension.*

The FFT-conjecture hods in types A *and* C.

The rôle of the symmetrisation map

Let $\varpi : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ be the canonical symmetrisation map. If $\mathfrak{g}$ is a classical Lie algebra, then there are generators $\{H_i\} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ such that $\widetilde{\mathcal{F}}_\gamma$ is generated by $\varpi(\partial_\gamma^k H_i)$, Tarasov, Molev–Y.. We conjecture that this is true for all reductive $\mathfrak{g}$.

Гипотеза (Panyushev–Y.)

Suppose that an involution $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ is good. Let $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ be generated by $\varpi((H_j)_{(i,d_j-i)})$ with $1 \leqslant i \leqslant \ell$, $0 \leqslant i \leqslant d_i$. Then $\widetilde{\mathcal{A}}$ is commutative and $\mathrm{gr}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \mathcal{A}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$.

Список работ по теме доклада

1. (with D. Panyushev) "The argument shift method and maximal commutative subalgebras of Poisson algebras", *Math. Res. Letters*, **15** no. 2 (2008), 239–249.
2. (with A. Molev) "Quantisation and nilpotent limits of Mishchenko–Fomenko subalgebras", *Representation Theory*, **23** (2019), 350–378.
3. (with D. Panyushev) "Poisson-commutative subalgebras and complete integrability on non-regular coadjoint orbits and flag varieties", *Math. Zeitschrift*, **295** (2020), 101–127.
4. (with D. Panyushev) "Poisson-commutative subalgebras of $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ associated with involutions", to appear in *Int. Math. Res. Notices*; `arXiv:1809.00350`.
5. (with D.I. Panyushev) "Compatible Poisson brackets associated with 2-splittings and Poisson commutative subalgebras of $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$", `arXiv:2009.05271`.
6. "Commutative subalgebras of $\mathcal{U}(\mathfrak{q})$ of maximal transcendence degree", to appear in *Math. Res. Letters*; `arXiv:2001.11493`.

Спасибо за внимание!