

### 1. Лемма о хороводах–1: устройство графа. 9 августа

**Наблюдение.** Если несколько человек возьмутся за руки, то они разобьются на несколько хороводов.

**Умными словами.** Если в графе степени всех вершин равны 2, то он является объединением нескольких (возможно, одного) циклов.

**Вопрос для обсуждения.** А если степени вершин не превосходят 2?

**Пример.** В чемпионате России по футболу играют 16 команд. В первом туре все команды сыграли по одной игре. Во втором туре также все команды сыграли по игре. Докажите, что можно указать такие 8 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

**Пример.** Каждая из 20 девочек после отбоя не более двух раз поболтала по телефону. Докажите, что из них можно выбрать 7 девочек, никакие две из которых не болтали друг с другом.

**Важно!** На этом занятии мы учимся не только лемме о хороводах, но и умению ссылаться на известные факты. Если в вашем решении нет фразы «тогда по лемме о хороводах наш граф — объединение...», то подумайте как его рассказать с ней.

1. В клубе «Линолеум» у каждого джентельмена ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что клуб можно разбить на два клуба, внутри которых ни у кого не будет ни друзей, ни врагов.

2. В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Докажите, что можно организовать не менее 10 дежурств так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды. Всегда ли можно 11?

3. Двадцать школьников решили двадцать задач. Известно, что каждый решил по 2 задачи, и каждую задачу решило 2 человека. Докажите, что можно попросить каждого школьника рассказать одну из решенных им задач так, чтобы все задачи были рассказаны.

4. После нескольких игровых дней однокругового футбольного чемпионата выяснилось, что любые пять команд можно так расположить по кругу, чтобы каждая команда сыграла со стоящими справа и слева. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня (в один день команда может сыграть не более одной игры).

*На другой стороне есть ещё задачи!*

### 1. Лемма о хороводах–1: устройство графа. 9 августа

**Наблюдение.** Если несколько человек возьмутся за руки, то они разобьются на несколько хороводов.

**Умными словами.** Если в графе степени всех вершин равны 2, то он является объединением нескольких (возможно, одного) циклов.

**Вопрос для обсуждения.** А если степени вершин не превосходят 2?

**Пример.** В чемпионате России по футболу играют 16 команд. В первом туре все команды сыграли по одной игре. Во втором туре также все команды сыграли по игре. Докажите, что можно указать такие 8 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

**Пример.** Каждая из 20 девочек после отбоя не более двух раз поболтала по телефону. Докажите, что из них можно выбрать 7 девочек, никакие две из которых не болтали друг с другом.

**Важно!** На этом занятии мы учимся не только лемме о хороводах, но и умению ссылаться на известные факты. Если в вашем решении нет фразы «тогда по лемме о хороводах наш граф — объединение...», то подумайте как его рассказать с ней.

1. В клубе «Линолеум» у каждого джентельмена ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что клуб можно разбить на два клуба, внутри которых ни у кого не будет ни друзей, ни врагов.

2. В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Докажите, что можно организовать не менее 10 дежурств так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды. Всегда ли можно 11?

3. Двадцать школьников решили двадцать задач. Известно, что каждый решил по 2 задачи, и каждую задачу решило 2 человека. Докажите, что можно попросить каждого школьника рассказать одну из решенных им задач так, чтобы все задачи были рассказаны.

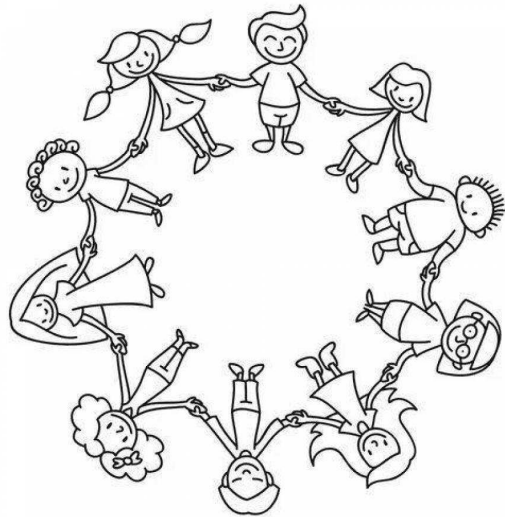
4. После нескольких игровых дней однокругового футбольного чемпионата выяснилось, что любые пять команд можно так расположить по кругу, чтобы каждая команда сыграла со стоящими справа и слева. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня (в один день команда может сыграть не более одной игры).

*На другой стороне есть ещё задачи!*

5. В стране 300 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что для любой четверки городов от любого города этой четверки можно добраться до любого другого города этой четверки, не проезжая через оставшиеся 296 городов. При каком наибольшем  $k$  в стране обязательно можно выбрать  $k$  городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой?

6. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: «Я могу одновременно поженить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке» Вторая сваха говорит: «А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!» Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: «В таком случае можно сделать и то, и другое!» Прав ли он?

7. В стране 100 дорог (каждая дорога соединяет ровно два города, на всех дорогах двустороннее движение), и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.



5. В стране 300 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что для любой четверки городов от любого города этой четверки можно добраться до любого другого города этой четверки, не проезжая через оставшиеся 296 городов. При каком наибольшем  $k$  в стране обязательно можно выбрать  $k$  городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой?

6. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: «Я могу одновременно поженить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке» Вторая сваха говорит: «А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!» Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: «В таком случае можно сделать и то, и другое!» Прав ли он?

7. В стране 100 дорог (каждая дорога соединяет ровно два города, на всех дорогах двустороннее движение), и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

