

**2. Неравенства с числами. 9 августа****Пример.** Докажите, что

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2023} + \frac{1}{2025} + \dots + \frac{1}{4044} < 1.$$

**1.** Докажите, что

$$100^{101} + 101^{102} + \dots + 2023^{2024} < 2023 \cdot (100^{100} + 101^{101} + \dots + 2023^{2023}).$$

**2.** Докажите, что

$$\frac{1}{2023} + \frac{1}{2024} + \dots + \frac{1}{6068} < \frac{3}{2}.$$

**3.** Докажите, что

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100 > 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99.$$

**4.** Докажите, что

$$\text{a) } 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{2023} < 2^{2024};$$

$$\text{b) } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023}} < 2.$$

**5.** Докажите, что

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{2023}} > 1000.$$

**6.** Докажите, что следующие два числа отличаются более чем на 1000:

$$2021 \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2021} \right) \text{ и } 2022 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2022} \right).$$

**7.** Докажите, что

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{2023!} < 2.$$

**8.** Докажите, что

$$2^{2021 \cdot 2^{2023} + 2025} \leq (2^{2023})! \leq 2^{2022 \cdot 2^{2023} + 1}.$$

**9.** Докажите, что

$$100^{101} + 101^{102} + \dots + 2023^{2024} > 2022 \cdot (100^{100} + 101^{101} + \dots + 2023^{2023}).$$

**10.** Какое из чисел больше:  $(100!)!$  или  $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$ ?**2. Неравенства с числами. 9 августа****Пример.** Докажите, что

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2023} + \frac{1}{2025} + \dots + \frac{1}{4044} < 1.$$

**1.** Докажите, что

$$100^{101} + 101^{102} + \dots + 2023^{2024} < 2023 \cdot (100^{100} + 101^{101} + \dots + 2023^{2023}).$$

**2.** Докажите, что

$$\frac{1}{2023} + \frac{1}{2024} + \dots + \frac{1}{6068} < \frac{3}{2}.$$

**3.** Докажите, что

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100 > 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99.$$

**4.** Докажите, что

$$\text{a) } 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{2023} < 2^{2024};$$

$$\text{b) } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023}} < 2.$$

**5.** Докажите, что

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{2023}} > 1000.$$

**6.** Докажите, что следующие два числа отличаются более чем на 1000:

$$2021 \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2021} \right) \text{ и } 2022 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2022} \right).$$

**7.** Докажите, что

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{2023!} < 2.$$

**8.** Докажите, что

$$2^{2021 \cdot 2^{2023} + 2025} \leq (2^{2023})! \leq 2^{2022 \cdot 2^{2023} + 1}.$$

**9.** Докажите, что

$$100^{101} + 101^{102} + \dots + 2023^{2024} > 2022 \cdot (100^{100} + 101^{101} + \dots + 2023^{2023}).$$

**10.** Какое из чисел больше:  $(100!)!$  или  $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$ ?