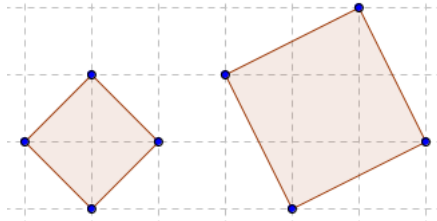


4. Квадраты на клетчатой плоскости. 10 августа

Определение. Дана клетчатая плоскость, длина стороны клетки равна 1. Будем называть квадрат площади S *реализуемым*, если существует квадрат с вершинами в вершинах клеток, площадь которого равна S .

1. Докажите, что если S — квадрат натурального числа, то квадрат площади S реализуем.

2. Найдите площади квадратов на рисунке ниже.



3. Докажите, что если квадрат площади S реализуем, то S — целое число.

4. Докажите, что если квадрат площади S реализуем, то реализуем и квадрат площади $2S$.

5. Пусть S — натуральное число. Докажите, что если квадрат площади $2S$ реализуем, то реализуем и квадрат площади S .

6. Докажите, что если квадраты площади S и T реализуемые, то реализуем и квадрат площади $S \cdot T$.

7. а) Докажите, что квадрат площади S реализуем тогда и только тогда, когда для некоторых целых чисел a и b выполнено $S = a^2 + b^2$. Помните, что значит «тогда и только тогда, когда»?

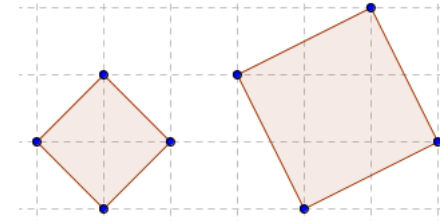
б) Выведите из пункта а) задачу 6..

4. Квадраты на клетчатой плоскости. 10 августа

Определение. Дана клетчатая плоскость, длина стороны клетки равна 1. Будем называть квадрат площади S *реализуемым*, если существует квадрат с вершинами в вершинах клеток, площадь которого равна S .

1. Докажите, что если S — квадрат натурального числа, то квадрат площади S реализуем.

2. Найдите площади квадратов на рисунке ниже.



3. Докажите, что если квадрат площади S реализуем, то S — целое число.

4. Докажите, что если квадрат площади S реализуем, то реализуем и квадрат площади $2S$.

5. Пусть S — натуральное число. Докажите, что если квадрат площади $2S$ реализуем, то реализуем и квадрат площади S .

6. Докажите, что если квадраты площади S и T реализуемые, то реализуем и квадрат площади $S \cdot T$.

7. а) Докажите, что квадрат площади S реализуем тогда и только тогда, когда для некоторых целых чисел a и b выполнено $S = a^2 + b^2$. Помните, что значит «тогда и только тогда, когда»?

б) Выведите из пункта а) задачу 6..