5. НОД и НОК. 11 августа

Определение. *Наибольшим общим делителем* двух целых чисел a и b называется наибольший из их общих делителей. **Обозначение.** НОД(a, b) или (a, b)

Определение. *Наименьшим общим кратным* двух целых чисел a и b называется наименьшее из их общих кратных. **Обозначение.** НОК(a, b) или $[a, b]$.

Вопрос. Почему предыдущее определение не правильное? Чего ему не хватает, чтобы стать правильным?

Ещё раз. НОД — это общий делитель, а НОК — общее кратное.

Напоминание 1. Определение делимости: $a \vdots b$ означает, что $a = bc$ для некоторого целого c.

Напоминание 2. Если в определении делимости $c \neq 0$, то $|c| \geqslant 1$, откуда $|a| \geqslant |b|$. Таким образом, если $a \vdots b$, то или $a = 0$, или $|a| \geqslant |b|$.

Думаем дальше. Если $c \neq 0$ и $|c| \neq 1$, то $|c| \geqslant 2$. Значит, можно написать даже так:

$$\text{если } a \vdots b, \text{ то или } a = 0, \text{ или } |a| = |b|, \text{ или } |a| \geqslant 2|b|.$$

Например. Пусть a и b — натуральные числа. Тогда

- $[a, b] = a$ или $[a, b] \geqslant 2a$; *НОК — большое число!*
- $(a, b) = a$ или $a \geqslant 2 \cdot (a, b)$.

1. Пусть a и b — натуральные числа.
a) Докажите, что $(a, b) = a$ тогда и только тогда, когда $b \vdots a$. Осознайте, что или $b \vdots a$, или $(a, b) \leqslant \frac{a}{2}$.
b) Сформулируйте и докажите аналогичные два утверждения для НОК.

2. Натуральные числа x, y, z таковы, что НОД$(x, y) = z$ и НОК$(y, z) = x$. Докажите, что $x = y = z$.

3. Докажите, что для любых двух натуральных чисел a и b выполняется неравенство $a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geqslant 2ab$.

На другой стороне есть ещё задачи!

«Дилемма», 6 класс Регина, август 2023

5. НОД и НОК. 11 августа

Определение. *Наибольшим общим делителем* двух целых чисел a и b называется наибольший из их общих делителей. **Обозначение.** НОД(a, b) или (a, b)

Определение. *Наименьшим общим кратным* двух целых чисел a и b называется наименьшее из их общих кратных. **Обозначение.** НОК(a, b) или $[a, b]$.

Вопрос. Почему предыдущее определение не правильное? Чего ему не хватает, чтобы стать правильным?

Ещё раз. НОД — это общий делитель, а НОК — общее кратное.

Напоминание 1. Определение делимости: $a \vdots b$ означает, что $a = bc$ для некоторого целого c.

Напоминание 2. Если в определении делимости $c \neq 0$, то $|c| \geqslant 1$, откуда $|a| \geqslant |b|$. Таким образом, если $a \vdots b$, то или $a = 0$, или $|a| \geqslant |b|$.

Думаем дальше. Если $c \neq 0$ и $|c| \neq 1$, то $|c| \geqslant 2$. Значит, можно написать даже так:

$$\text{если } a \vdots b, \text{ то или } a = 0, \text{ или } |a| = |b|, \text{ или } |a| \geqslant 2|b|.$$

Например. Пусть a и b — натуральные числа. Тогда

- $[a, b] = a$ или $[a, b] \geqslant 2a$; *НОК — большое число!*
- $(a, b) = a$ или $a \geqslant 2 \cdot (a, b)$.

1. Пусть a и b — натуральные числа.
a) Докажите, что $(a, b) = a$ тогда и только тогда, когда $b \vdots a$. Осознайте, что или $b \vdots a$, или $(a, b) \leqslant \frac{a}{2}$.
b) Сформулируйте и докажите аналогичные два утверждения для НОК.

2. Натуральные числа x, y, z таковы, что НОД$(x, y) = z$ и НОК$(y, z) = x$. Докажите, что $x = y = z$.

3. Докажите, что для любых двух натуральных чисел a и b выполняется неравенство $a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geqslant 2ab$.

На другой стороне есть ещё задачи!

4. Про натуральные числа a, b, c известно, что

$$(a,b)+(b,c)+(c,a) > \frac{a+b+c}{2}.$$

Докажите, что одно из чисел a, b, c делится на другое.

5. Натуральные числа k, ℓ, m таковы, что

$$\text{НОК}(k,\ell)+m = k+\text{НОД}(\ell,m).$$

Докажите, что k делится на m.

6. Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОК}(m,n)+\text{НОД}(m,n) = m+n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

7. Про натуральные числа a, b, c известно, что

$$(a,b)+(b,c)+(c,a) = \frac{a+b+c}{2}.$$

Докажите, что одно из чисел a, b, c делится на другое.

8. В вершинах куба записаны 8 различных чисел. На каждом ребре куба записан наибольший общий делитель чисел в вершинах этого ребра. Может ли так быть, что сумма чисел на рёбрах равна сумме чисел в вершинах?

9. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что $\text{НОК}(a,b,c) = a+b+c$. Докажите, что среди чисел a, b, c есть чётное число.

10. Для натуральных чисел a и b выполняется неравенство

$$a\cdot\text{НОД}(a,b)+b\cdot\text{НОК}(a,b) < 2{,}5ab.$$

Докажите, что a делится на b.

4. Про натуральные числа a, b, c известно, что

$$(a,b)+(b,c)+(c,a) > \frac{a+b+c}{2}.$$

Докажите, что одно из чисел a, b, c делится на другое.

5. Натуральные числа k, ℓ, m таковы, что

$$\text{НОК}(k,\ell)+m = k+\text{НОД}(\ell,m).$$

Докажите, что k делится на m.

6. Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОК}(m,n)+\text{НОД}(m,n) = m+n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

7. Про натуральные числа a, b, c известно, что

$$(a,b)+(b,c)+(c,a) = \frac{a+b+c}{2}.$$

Докажите, что одно из чисел a, b, c делится на другое.

8. В вершинах куба записаны 8 различных чисел. На каждом ребре куба записан наибольший общий делитель чисел в вершинах этого ребра. Может ли так быть, что сумма чисел на рёбрах равна сумме чисел в вершинах?

9. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что $\text{НОК}(a,b,c) = a+b+c$. Докажите, что среди чисел a, b, c есть чётное число.

10. Для натуральных чисел a и b выполняется неравенство

$$a\cdot\text{НОД}(a,b)+b\cdot\text{НОК}(a,b) < 2{,}5ab.$$

Докажите, что a делится на b.