7. Лемма о хороводах–2: в поисках графа. 13 августа

Пример. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку. Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета.

1. a) В клетках доски 2×100 стоят числа от 1 до 100, каждое по 2 раза. Докажите, что можно выбрать в каждом столбце по одному числу так, что будут выбраны все числа от 1 до 100.
b**) Верно ли аналогичное утверждение для доски 3×100?

2. У Амбарцума есть восемь кубиков $1\times1\times1$. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 24 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 2 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб $2\times2\times2$ таким образом, чтобы на его поверхности был квадрат каждого цвета.

3. Дан клетчатый квадрат $n\times n$. Стороны клеток покрасили так, что у каждой клетки ровно две покрашенные стороны и ни одна покрашенная сторона не лежит на периметре данного квадрата $n\times n$. При каких n это возможно?

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N-1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.

5. Имеется граф. Известно, что для любой его вершины, если её удалить, оставшиеся вершины можно разбить на пары, соединённые ребром. Докажите, что каждая вершина входит в некоторый цикл нечётной длины.

«Дилемма», 6 класс — Регина, август 2023

7. Лемма о хороводах–2: в поисках графа. 13 августа

Пример. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку. Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета.

1. a) В клетках доски 2×100 стоят числа от 1 до 100, каждое по 2 раза. Докажите, что можно выбрать в каждом столбце по одному числу так, что будут выбраны все числа от 1 до 100.
b**) Верно ли аналогичное утверждение для доски 3×100?

2. У Амбарцума есть восемь кубиков $1\times1\times1$. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 24 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 2 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб $2\times2\times2$ таким образом, чтобы на его поверхности был квадрат каждого цвета.

3. Дан клетчатый квадрат $n\times n$. Стороны клеток покрасили так, что у каждой клетки ровно две покрашенные стороны и ни одна покрашенная сторона не лежит на периметре данного квадрата $n\times n$. При каких n это возможно?

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N-1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.

5. Имеется граф. Известно, что для любой его вершины, если её удалить, оставшиеся вершины можно разбить на пары, соединённые ребром. Докажите, что каждая вершина входит в некоторый цикл нечётной длины.