8. Последовательное конструирование. 13 августа

Пример. Сравним две задачи:

a. На клетчатой плоскости стоят 100 ладей. Докажите, что их можно покрасить в 5 цветов так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга.

b. Петя выставляет по одной ладье на шахматную доску, а Вася красит выставленную ладью в один из 5 цветов. Докажите, что Вася может красить их так, чтобы одноцветные ладьи никогда не били друг друга.

- вторую задачу решать проще: достаточно решить проблему только с одной ладьёй;
- во второй задаче есть процесс, которого нет в первой: если бы мы хотели решить первую задачу, нам пришлось бы самим запустить некоторый процесс; если это сделать не бездумно, то можно получить более сильный результат (см. задачу **3.**)

Пример. В архипелаге 1000 островов, между которыми нет мостов. Новый президент приказал построить между некоторыми островами мосты так, чтобы с каждого архипелага до любого другого можно было добраться на машине. Докажите, что потребуется не менее 999 мостов.

1. Докажите, что можно найти 100 натуральных чисел, что для любой пары этих чисел остаток от деления большего на меньшее был равен 3.

2. Плоскость разбита на части 100 прямыми и 100 окружностями. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, чтобы части одинакового цвета не имели общего участка границы ненулевой длины.

3. На клетчатой плоскости стоят 100 ладей. Докажите, что их можно покрасить в 3 цвета так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга.

4. На бумажном треугольнике нарисованы 100 отрезков (каждый от края до края). Саша порезал треугольник по нарисованным отрезкам.
a) Докажите, что одна из получившихся частей — треугольник.
b) Докажите, что если ровно одна из частей — треугольник, то остальные — четырёхугольники.

На другой стороне есть ещё задачи!

«Дилемма», 6 класс *Регина, август 2023*

8. Последовательное конструирование. 13 августа

Пример. Сравним две задачи:

a. На клетчатой плоскости стоят 100 ладей. Докажите, что их можно покрасить в 5 цветов так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга.

b. Петя выставляет по одной ладье на шахматную доску, а Вася красит выставленную ладью в один из 5 цветов. Докажите, что Вася может красить их так, чтобы одноцветные ладьи никогда не били друг друга.

- вторую задачу решать проще: достаточно решить проблему только с одной ладьёй;
- во второй задаче есть процесс, которого нет в первой: если бы мы хотели решить первую задачу, нам пришлось бы самим запустить некоторый процесс; если это сделать не бездумно, то можно получить более сильный результат (см. задачу **3.**)

Пример. В архипелаге 1000 островов, между которыми нет мостов. Новый президент приказал построить между некоторыми островами мосты так, чтобы с каждого архипелага до любого другого можно было добраться на машине. Докажите, что потребуется не менее 999 мостов.

1. Докажите, что можно найти 100 натуральных чисел, что для любой пары этих чисел остаток от деления большего на меньшее был равен 3.

2. Плоскость разбита на части 100 прямыми и 100 окружностями. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, чтобы части одинакового цвета не имели общего участка границы ненулевой длины.

3. На клетчатой плоскости стоят 100 ладей. Докажите, что их можно покрасить в 3 цвета так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга.

4. На бумажном треугольнике нарисованы 100 отрезков (каждый от края до края). Саша порезал треугольник по нарисованным отрезкам.
a) Докажите, что одна из получившихся частей — треугольник.
b) Докажите, что если ровно одна из частей — треугольник, то остальные — четырёхугольники.

На другой стороне есть ещё задачи!

5. На клетчатой плоскоски нарисован многоугольник, состоящий из 100 клеток. Какое наибольшее значение может принимать его периметр?

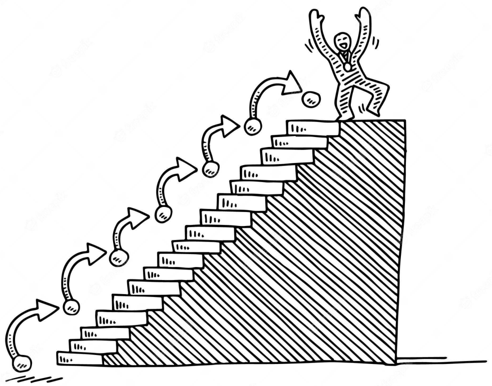
6. Докажите, что существуют 100 различных натуральных чисел, каждое из которых делит сумму оставшихся.

7. Представьте 1 как сумму 100 различных дробей с числителями 1 и различными натуральными знаменателями.

8. Среди 100 школьников каждый знаком не менее чем с 50 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

9. Квадрат разбит на 100 квадратиков (не обязательно равных). Докажите, что эти квадратики можно покрасить в 9 цветов так, чтобы любые два квадратика, имеющие хотя бы одну общую точку, были разных цветов.

10. На плоскости проведено 100 прямых общего положения[1]. Точки пересечения этих прямых будем называть *узлами*. Докажите, что узлы можно покрасить в 3 цвета так, что любой узел не будет иметь соседних узлов на своих прямых того же цвета.



[1]т.е. никакие две не параллельны (т.е. любые две пересекаются), никакие три не пересекаются в одной точке

5. На клетчатой плоскоски нарисован многоугольник, состоящий из 100 клеток. Какое наибольшее значение может принимать его периметр?

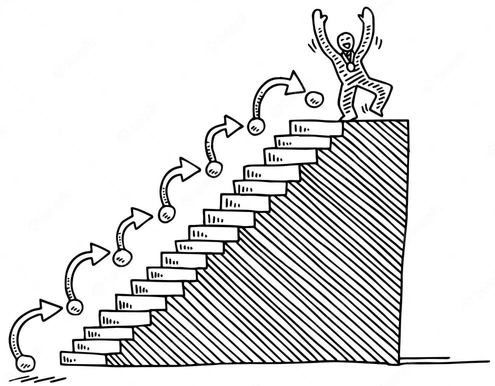
6. Докажите, что существуют 100 различных натуральных чисел, каждое из которых делит сумму оставшихся.

7. Представьте 1 как сумму 100 различных дробей с числителями 1 и различными натуральными знаменателями.

8. Среди 100 школьников каждый знаком не менее чем с 50 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

9. Квадрат разбит на 100 квадратиков (не обязательно равных). Докажите, что эти квадратики можно покрасить в 9 цветов так, чтобы любые два квадратика, имеющие хотя бы одну общую точку, были разных цветов.

10. На плоскости проведено 100 прямых общего положения[1]. Точки пересечения этих прямых будем называть *узлами*. Докажите, что узлы можно покрасить в 3 цвета так, что любой узел не будет иметь соседних узлов на своих прямых того же цвета.



[1]т.е. никакие две не параллельны (т.е. любые две пересекаются), никакие три не пересекаются в одной точке