13. Взаимная простота. 17 августа

Определение. Целые числа a и b называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, больших 1. **Обозначение.** $(a, b) = 1$, т.е. взаимно простые числа — это числа, НОД которых равен 1.

Осознание. Целые числа взаимно просты тогда и только тогда, когда у нет общих простых делителей.

Утверждение 1. Если $ab \vdots m$ и $(b, m) = 1$, то $a \vdots m$.

Утверждение 2. Если $a \vdots m$, $a \vdots n$ и $(n, m) = 1$, то $a \vdots nm$.

Наблюдение. Если $m \vdots n$, то $m + n \vdots n$, $m - n \vdots n$, $m + n^2 \vdots n$, $m - 10kn \vdots n$, …, в общем $m \pm n \cdot$ (что угодно) $\vdots\ n$

Упражнение. Докажите, что следующие пары чисел взаимно просты: a и $2a - 1$, $2n - 1$ и $2n + 1$, n^3 и $n^2 + 1$,

1. Для натуральных a и b известно, что $ab - 1 \vdots b + 1$. Докажите, что $a \geqslant b$.

2. Для натуральных чисел a и b докажите, что

$$(a, b + 1) \cdot (a + 1, b) \leqslant a + b + 1.$$

3. Найдите все пары натуральных чисел x и y таких, что $x^2y+1 \vdots xy-1$.

4. Натуральные числа a и b таковы, что

$$(a - b, ab + 1) = 1 \text{ и } (a + b, ab - 1) = 1.$$

Докажите, что числа $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$ взаимно просты. *Указание:* $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $ab+1 \vdots c$, $bc+1 \vdots a$, $ca+1 \vdots b$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c не больше 3.

«Дилемма», 6 класс Регина, август 2023

13. Взаимная простота. 17 августа

Определение. Целые числа a и b называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, больших 1. Обозначение. $(a, b) = 1$, т.е. взаимно простые числа — это числа, НОД которых равен 1.

Осознание. Целые числа взаимно просты тогда и только тогда, когда у нет общих простых делителей.

Утверждение 1. Если $ab \vdots m$ и $(b, m) = 1$, то $a \vdots m$.

Утверждение 2. Если $a \vdots m$, $a \vdots n$ и $(n, m) = 1$, то $a \vdots nm$.

Наблюдение. Если $m \vdots n$, то $m + n \vdots n$, $m - n \vdots n$, $m + n^2 \vdots n$, $m - 10kn \vdots n$, …, в общем $m \pm n \cdot$ (что угодно) $\vdots\ n$

Упражнение. Докажите, что следующие пары чисел взаимно просты: a и $2a - 1$, $2n - 1$ и $2n + 1$, n^3 и $n^2 + 1$,

1. Для натуральных a и b известно, что $ab - 1 \vdots b + 1$. Докажите, что $a \geqslant b$.

2. Для натуральных чисел a и b докажите, что

$$(a, b + 1) \cdot (a + 1, b) \leqslant a + b + 1.$$

3. Найдите все пары натуральных чисел x и y таких, что $x^2y+1 \vdots xy-1$.

4. Натуральные числа a и b таковы, что

$$(a - b, ab + 1) = 1 \text{ и } (a + b, ab - 1) = 1.$$

Докажите, что числа $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$ взаимно просты. Указание: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $ab+1 \vdots c$, $bc+1 \vdots a$, $ca+1 \vdots b$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c не больше 3.