18. Разнобой–4. 19 августа

1. Натуральные числа a и b поделили на их наибольший общий делитель d, получив числа x и y (т.е. $d = (a, b)$, $a = dx$, $b = dy$). Какие из следующих пар чисел тогда точно взаимно просты?

1) x и y; 2) x и b; 3) x и a; 4) x и d.

2. Докажите, что у чётного числа количество нечётных делителей не больше количества чётных.

3. На доске выписаны числа $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{99}$. К ним дописали ещё 100 натуральных чисел, не превосходящих 3^{99}, таким образом, что получилось 200 различных натуральных чисел. Докажите, что можно найти 4 выписанных числа таких, что сумма любых трёх из них больше четвёртого

4. На клетчатой плоскости стоят фишки (конечное количество), в каждой клетке не более одной. Известно, что в каждой строчке и в каждом столбце стоит по чётному количеству фишек. Докажите, что фишки можно покрасить в чёрный и белый цвета так, чтобы в каждой строчке и в каждом столбце стояли одинаковое количество чёрных и белых фишек.

5. Казино предлагает игру по таким правилам. Игрок ставит любое целое число долларов (но не больше, чем у него в этот момент есть) либо на орла, либо на решку. Затем подбрасывается монета. Если игрок угадал, как она упадёт, он получает назад свою ставку и столько же денег впридачу. Если не угадал — его ставку забирает казино. Если игроку не повезёт четыре раза подряд, казино присуждает ему в следующей игре утешительную победу вне зависимости от того, как упадёт монета. Джо пришёл в казино со 100 долларами. Он обязался сделать ровно пять ставок и ни разу не ставить больше 17 долларов. Какую наибольшую сумму денег он сможет гарантированно унести из казино после такой игры?

«Дилемма», 6 класс Регина, август 2023

18. Разнобой–4. 19 августа

1. Натуральные числа a и b поделили на их наибольший общий делитель d, получив числа x и y (т.е. $d = (a, b)$, $a = dx$, $b = dy$). Какие из следующих пар чисел тогда точно взаимно просты?

1) x и y; 2) x и b; 3) x и a; 4) x и d.

2. Докажите, что у чётного числа количество нечётных делителей не больше количества чётных.

3. На доске выписаны числа $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{99}$. К ним дописали ещё 100 натуральных чисел, не превосходящих 3^{99}, таким образом, что получилось 200 различных натуральных чисел. Докажите, что можно найти 4 выписанных числа таких, что сумма любых трёх из них больше четвёртого

4. На клетчатой плоскости стоят фишки (конечное количество), в каждой клетке не более одной. Известно, что в каждой строчке и в каждом столбце стоит по чётному количеству фишек. Докажите, что фишки можно покрасить в чёрный и белый цвета так, чтобы в каждой строчке и в каждом столбце стояли одинаковое количество чёрных и белых фишек.

5. Казино предлагает игру по таким правилам. Игрок ставит любое целое число долларов (но не больше, чем у него в этот момент есть) либо на орла, либо на решку. Затем подбрасывается монета. Если игрок угадал, как она упадёт, он получает назад свою ставку и столько же денег впридачу. Если не угадал — его ставку забирает казино. Если игроку не повезёт четыре раза подряд, казино присуждает ему в следующей игре утешительную победу вне зависимости от того, как упадёт монета. Джо пришёл в казино со 100 долларами. Он обязался сделать ровно пять ставок и ни разу не ставить больше 17 долларов. Какую наибольшую сумму денег он сможет гарантированно унести из казино после такой игры?