19. Сведение к меньшему. 21 августа

В листочке «Последовательное конструирование» цепочка, по которой мы шли, чтобы получить финальный результат, или была бездумной (просто добавляли ладьи или прямые), или выбиралась из соображений удобства обхода (ладьи). В этом листочке мы пытаемся строить цепочки в более сложных ситуациях.

> наша цель — решить задачу для большого числа n (в предыдущем листочке почти в каждой задаче было число 100); мы должны думать именно о том, как мы можем прийти к утверждению для n от меньшего числа;

Мы хотим понять, как спустится от утверждения для n к утверждению для $n-1$; если думать о том, куда мы можем подняться от меньшего утверждения, то не факт, что мы придём к нашему.

Это можно сравнить с попыткой дойти от конкретного листочка дерева к его корню: двигаясь от корня мы не знаем, на какую ветку свернуть, на какую веточку свернуть с большой ветки и т.п. Двигаясь же от листочка мы просто всегда идём вниз: построив этот путь, мы сможем по нему пройти обратно.

Пример. На клетчатой плоскости стоят 100 ладей. Докажите, что их можно покрасить в 3 цвета так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга.

1. Клетчатый шестиугольник, составленный из двух полосок ширины 1, назовём уголком. Докажите, что клетчатый квадрат 100×100 без клетки можно разбить на уголки с различным нечётным числом клеток.

2. На конкурсе плиточников нужно составить из заранее заготовленных плиток фигуру в виде доски $2^{100}\times2^{100}$ без одной клетки (причём какая клетка должна отсутствовать, заранее неизвестно). Можно ли успешно участвовать в таком конкурсе, взяв с собой всего 100 плиток?

3. В каждой клетке полоски 1×100 лежит по монете. За один ход можно сдвинуть все монеты из какой-то клетки на столько клеток вправо или влево, сколько монет в клетке. Докажите, что за 99 ходов можно собрать все монеты а) в самой левой клетке; b) в любой клетке.

На другой стороне есть ещё задачи!

«Дилемма», 6 класс Регина, август 2023

19. Сведение к меньшему. 21 августа

В листочке «Последовательное конструирование» цепочка, по которой мы шли, чтобы получить финальный результат, или была бездумной (просто добавляли ладьи или прямые), или выбиралась из соображений удобства обхода (ладьи). В этом листочке мы пытаемся строить цепочки в более сложных ситуациях.

наша цель — решить задачу для большого числа n (в предыдущем листочке почти в каждой задаче было число 100); мы должны думать именно о том, как мы можем прийти к утверждению для n от меньшего числа;

Мы хотим понять, как спустится от утверждения для n к утверждению для $n-1$; если думать о том, куда мы можем подняться от меньшего утверждения, то не факт, что мы придём к нашему.

Это можно сравнить с попыткой дойти от конкретного листочка дерева к его корню: двигаясь от корня мы не знаем, на какую ветку свернуть, на какую веточку свернуть с большой ветки и т.п. Двигаясь же от листочка мы просто всегда идём вниз: построив этот путь, мы сможем по нему пройти обратно.

Пример. На клетчатой плоскости стоят 100 ладей. Докажите, что их можно покрасить в 3 цвета так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга.

1. Клетчатый шестиугольник, составленный из двух полосок ширины 1, назовём уголком. Докажите, что клетчатый квадрат 100×100 без клетки можно разбить на уголки с различным нечётным числом клеток.

2. На конкурсе плиточников нужно составить из заранее заготовленных плиток фигуру в виде доски $2^{100}\times2^{100}$ без одной клетки (причём какая клетка должна отсутствовать, заранее неизвестно). Можно ли успешно участвовать в таком конкурсе, взяв с собой всего 100 плиток?

3. В каждой клетке полоски 1×100 лежит по монете. За один ход можно сдвинуть все монеты из какой-то клетки на столько клеток вправо или влево, сколько монет в клетке. Докажите, что за 99 ходов можно собрать все монеты а) в самой левой клетке; b) в любой клетке.

На другой стороне есть ещё задачи!

4. На плоскости отмечены $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$ точек, образующие узлы правильного треугольника со стороной 99. Докажите, что
a) любые 5049 из них можно зачеркнуть 99-ю прямыми;
b) все 5050 зачеркнуть 99-ю прямыми нельзя.

5. На доске написаны числа 1, 2, ..., 100. Петя стирает их по одному. Докажите, что он может это делать в таком порядке, чтобы сумма нестёртых чисел всегда была составным числом.

6. По кругу лежат a) 2^{100}; b) 1000 яблок, занумерованных по часовой стрелке. Начав с первого, Робин-Бобин первое пропускает, второе съедает, следующее пропускает, опять одно съедает и т.д. Так он есть по кругу пока не останется одно яблоко. Найдите его номер.

7. В клетках квадратной таблицы 100×100 клеток стоит ровно 99 нулей и проведена диагональ из левого верхнего угла в правый нижний. Можно переставлять столбцы и строки вместе с их содержимым. Докажите, что можно добиться, чтобы все нули лежали под диагональю.

4. На плоскости отмечены $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$ точек, образующие узлы правильного треугольника со стороной 99. Докажите, что
a) любые 5049 из них можно зачеркнуть 99-ю прямыми;
b) все 5050 зачеркнуть 99-ю прямыми нельзя.

5. На доске написаны числа 1, 2, ..., 100. Петя стирает их по одному. Докажите, что он может это делать в таком порядке, чтобы сумма нестёртых чисел всегда была составным числом.

6. По кругу лежат a) 2^{100}; b) 1000 яблок, занумерованных по часовой стрелке. Начав с первого, Робин-Бобин первое пропускает, второе съедает, следующее пропускает, опять одно съедает и т.д. Так он есть по кругу пока не останется одно яблоко. Найдите его номер.

7. В клетках квадратной таблицы 100×100 клеток стоит ровно 99 нулей и проведена диагональ из левого верхнего угла в правый нижний. Можно переставлять столбцы и строки вместе с их содержимым. Докажите, что можно добиться, чтобы все нули лежали под диагональю.