Список вопросов и избранных задач к теоретическому зачёту. 20 августа

1. Лемма о хороводах.

2. Минимальное количество рёбер в связном графе на n вершинах: доказательство через запуск процесса.

3. Когда в графе без изолированных вершин существует эйлеров цикл? Эйлеров путь?

4. НОД и НОК: определение; критерий равенства НОК/НОД одному из чисел; неравенство на НОД и НОК, если они не равны одному из чисел.

5. Взаимная простота: определение; утверждения про делимость и взаимную простоту, их вывод из Основной Теоремы Арифметики.

Комментарий. Задачи ниже решаются некоторыми важными идеями и навыками со смены. Это часть *зачёта по теории*, поэтому на зачёте ожидается рассказ именно таких решений. Рассказ другого решения — это **не** сданный вопрос по теории.

1.7. В стране 100 дорог (каждая дорога соединяет ровно два города, на всех дорогах двустороннее движение), и из любых трёх дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

2.5. Докажите, что $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{2023}}>1000$.

2.7. Докажите, что $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{2023!}<2$.

5.5. Натуральные числа k, ℓ, m таковы, что $\text{НОК}(k,\ell)+m=k+\text{НОД}(\ell,m)$. Докажите, что k делится на m.

5.7. Про натуральные числа a, b, c известно, что $(a,b)+(b,c)+(c,a)=\dfrac{a+b+c}{2}$. Докажите, что одно из чисел a, b, c делится на другое.

7.4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспересадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причём из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N-1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.

8.3. На клетчатой плоскости стоят 100 ладей. Докажите, что их можно покрасить в 3 цвета так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга.

9.4. Будем называть натуральное число *красивым*, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?

10.2. Для натурального n обозначим $T(n)$ число $1+2+\ldots+n$. Докажите, что существуют числа a, b, c, каждое из которых большое 1000, что $T(a)+T(b)=T(c)$.

10.4. Докажите, что $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2022\cdot 2023}<1$.

12.2. На столе лежит куча из 600 ракушек. Из неё убирают одну ракушку и кучу делят на две непустые кучи (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, содержащей больше двух ракушек, снова убирают одну ракушку и снова делят на две непустые. И так далее. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи по 2 и 3 ракушки, причём этих кучек поровну?

12.4. Несколько шестиклассников собрали поровну шишек. Время от времени какие-то шестиклассники раздают каждому из остальных поровну из своих шишек. В конце у Васи осталось 30 шишек, а у Пети — 13 шишек. Сколько было шестиклассников?

13.2. Для натуральных a и b докажите, что $(a,b+1)\cdot(a+1,b)\leqslant a+b+1$.

13.3. Найдите все пары натуральных чисел x и y таких, что $x^2y+1 \mathrel{\vdots} xy-1$.

15.7. В мешке много котов — черных, белых и серых. Количество чёрных котов больше, чем удвоенное количество белых; утроенное количество белых котов больше, чем учетверённое количество серых; утроенное количество серых котов больше количества чёрных. Какое наименьшее возможное общее число котов?

16.пример. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

18.4. На клетчатой плоскости стоят фишки (конечное количество), в каждой клетке не более одной. Известно, что в каждой строчке и в каждом столбце стоит по чётному количеству фишек. Докажите, что фишки можно покрасить в чёрный и белый цвета так, чтобы в каждой строчке и в каждом столбце стояли одинаковое количество чёрных и белых фишек.

19.4b). На плоскости отмечены $1+2+\ldots+100=5050$ точек, образующие узлы правильного треугольника со стороной 99. Докажите, что все 5050 точек нельзя зачеркнуть 99-ю прямыми.

21.2. У Амбарцума есть восемь кубиков $1\times1\times1$. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 12 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 4 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб $2\times2\times2$ таким образом, чтобы на его поверхности было по 2 квадрата каждого цвета.