1. Алгебра с условиями. 15 декабря

Частым типом задач по алгебре в первых трёх задачах будет «алгебра с условиями», т.е. вам даны какие-то условия, а надо из них сделать некоторых вывод или что-то найти.

Полезные навыки.

- «как может получиться такое выражение?»: например, условие содержит x^2, а утверждение содержит x^6 — видимо, имеет смысл возвести условие в куб; или условие содержит x^2, а утверждение содержит x^3 — видимо, условие можно возвести в куб, а утверждение — в квадрат.
- группировка/не раскрывать скобки просто так: математика о том, что $73 \cdot 29 + 71 \cdot 73$ нужно считать как $73 \cdot (29 + 71) = 73 \cdot 100 = 7300$, а не как $73 \cdot 29 = 2117$, $71 \cdot 73 = 5183$, $2117 + 5183 = 7300$.
- формулы сокращённого умножения: разность квадратов и квадрат разности, разности n-х степеней, куб суммы и другие формулы с форзаца учебника стоит знать наизусть и уметь их узнавать в самых разных местах;
- работа с неравенствами: если среди чисел могут быть отрицательные, то стоит повысить самоконтроль;
- работа с рациональными и иррациональными числами: может ли сумма иррациональных чисел быть рациональной? может ли произведение иррациональных чисел быть рациональным?

Важный вопрос. Может ли произведение рационального числа на иррациональное быть рациональным числом?

1. Сумма четырех целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырех произведений, умноженная на -1, равна удвоенному квадрату целого числа.

2. На доске написаны четыре ненулевых числа. Петя посчитал произведение каждого из чисел на сумму трёх остальных чисел. У него получились четыре одинаковых числа. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.

3. Числа x, y и z таковы, что каждое из чисел $x + yz$, $y + zx$ и $z + xy$ рационально, а кроме того $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также является рациональным.

4. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

5. Числа x и y не равны нулю и удовлетворяют неравенствам $x^4 - y^4 > x$ и $y^4 - x^4 > y$. Может ли xy быть отрицательным числом?

6. Целые числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 2n + 1$. Докажите, что $a^3 + b^2 - a^2 - b^3$ делится на n.

7. Целые числа a, x_1, x_2, $\ldots$, x_{13} таковы, что

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_{13}).$$

Докажите, что одно из чисел a, x_1, x_2, $\ldots$, x_{13} равно нулю.

8. Найдите все такие x, что среди чисел $x - \sqrt{2}$, $x - 1/x$, $x + 1/x$, $x^2 + 2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым.

9. На доске написаны функции: $x + 1$, $x^2 + 1$, $x^3 + 1$, $x^4 + 1$. Разрешается дописывать на доску новые функции, получаемые из написанных на доске с помощью операций вычитания и умножения. Покажите, как получить ненулевую функцию, которая при положительных значениях аргумента принимает неотрицательные значения, а при отрицательных значениях аргумента — неположительные значения.

10. Положительные числа x, y таковы, что $x^5 - y^3 \geqslant 2x$. Докажите, что $x^3 \geqslant 2y$.