

2. Сделай то, что написано в условии. 16 декабря

В чём сложность решения задач? Чаще всего называют «отсутствие алгоритмов решения». И правда, перед вами задача, а как к ней подступиться?

Очень часто несложные задачи решаются просто переводом из текста литературного в текст математический! Даже если задача не решится, в «математической» записи решать задачу удобней.

Что такое математическая запись. Первая идея — если в задаче речь идёт о каких-то числах, то можно их обозначить переменной. С выражением $\frac{1}{a-1}$ работать удобней, чем с фразой «число, обратное числу, на 1 меньше, чем данное».

Если чисел несколько, то используйте индексы: если чисел 2022, то их можно обозначить как $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$.¹ Дальше есть всякие разные идеи. Приведём те, которые помогут в этом листочке, и не только:

- a равняется b : вы не поверите, $a = b$.
- a делится на b : помимо стандартного $a : b$, можно написать равенство $a = bk$ для некоторого целого k ;
- число n даёт остаток r при делении на натуральное m : «даёт остаток» значит, что $n - r$ делится на m и $0 \leq r < m$ (это очень важно неравенство про остаток);
- среднее арифметическое: это сумма поделить на количество; можно записывать, что сумма равна количеству умножить на среднее арифметическое;
- $AB = XY + ST$: в задачах по геометрии часто имеет смысл отметить на отрезке AB точку C такую, что $AC = XY$ и $CB = ST$;

1. Мы хотим решить задачу

Натуральное число, большее 1000000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 125. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде сотен?

Обозначьте число и остаток переменными, запишите условие и неравенство.

2. Мы хотим решить задачу

Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин? Найдите все возможности.

Введите две переменные, перепишите условие через выражения и равенства.

3. Мы хотим решить задачу

Пусть n — натуральное число, кратное натуральному же числу d . Докажите, что среди дробей

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \dots, \frac{n-1}{n-(n-1)}$$

найдётся дробь, равная $d - 1$.

Запишите условие делимости через равенство, запишите общий вид дроби и приравняйте $d - 1$.

4. Мы хотим решить задачу

Ученик за одну неделю получил 17 оценок (каждая из них — 2, 3, 4 или 5). Среднее арифметическое этих 17 оценок — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

Среднее арифметическое — это условие про сумму; оцените сумму, если каждая оценка встречается много раз.

5. Мы хотим решить задачу

Даны действительные числа a и b , причём $b > a > 1$. Пусть

$$x_n = 2^n \left(\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} \right).$$

Докажите, что последовательность x_1, x_2, \dots убывает.

Пишем два соседних члена, пытаемся доказать, что следующий меньше предыдущего.

¹ до индексов, ещё даже в 19-м веке написали бы «2022 числа a, b, \dots, z »; я верю, что индексы продвинули математику вперёд