4. Про квадратный трёхчлен. Задачи. 17 декабря

1. Два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства $f(1) = g(2)$ и $g(1) = f(2)$. Найдите сумму всех четырёх корней этих трёхчленов.

2. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным?

3. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение

$$a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$$

имеет единственное решение. Докажите, что $|a| = |b|$.

4. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_{100}(x)$ с одинаковыми старшими коэффициентами, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})?$$

5. Даны корни x_0 и x_1, x_0 и x_2, $\ldots$, x_0 и x_n квадратных трехчленов $x^2+a_1x+b_1$, $x^2+a_2x+b_2$, $\ldots$, $x^2+a_nx+b_n$. Найдите корни квадратного трехчлена

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

6. Пусть a, b, c — различные числа, причем $c \neq 0$. Докажите, что если уравнения $x^2 + ax + bc = 0$ и $x^2 + bx + ca = 0$ имеют ровно один общий корень, то другие корни этих уравнений удовлетворяют уравнению $x^2 + cx + ab = 0$.

7. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что расстояния между корнями трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.

Благовещенск, 15–19 декабря 2022

4. Про квадратный трёхчлен. Задачи. 17 декабря

1. Два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства $f(1) = g(2)$ и $g(1) = f(2)$. Найдите сумму всех четырёх корней этих трёхчленов.

2. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным?

3. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение

$$a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$$

имеет единственное решение. Докажите, что $|a| = |b|$.

4. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_{100}(x)$ с одинаковыми старшими коэффициентами, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})?$$

5. Даны корни x_0 и x_1, x_0 и x_2, $\ldots$, x_0 и x_n квадратных трехчленов $x^2+a_1x+b_1$, $x^2+a_2x+b_2$, $\ldots$, $x^2+a_nx+b_n$. Найдите корни квадратного трехчлена

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

6. Пусть a, b, c — различные числа, причем $c \neq 0$. Докажите, что если уравнения $x^2 + ax + bc = 0$ и $x^2 + bx + ca = 0$ имеют ровно один общий корень, то другие корни этих уравнений удовлетворяют уравнению $x^2 + cx + ab = 0$.

7. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что расстояния между корнями трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.