

4. Про квадратный трёхчлен. Теория. 17 декабря

Вторая часта тема задач по алгебре первой половины варианта — квадратный трёхчлен. Вкратце повторим, что нужно про него знать.

Определение. *Квадратным трёхчленом* называется выражение вида $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, x — обозначение переменной.

Число a называется *старшим коэффициентом*, число c — *свободным коэффициентом*.

Если $a = 1$, то трёхчлен называется *приведённым*, а на английский манер — *унитарным*.

Определение. Число x_0 называется *корнем квадратного трёхчлена* $ax^2 + bx + c$, если $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.

Обозначение. Часто, чтобы не переписывать много раз одно и то же, могут написать, что «дан квадратный трёхчлен $f(x)$ ». Т.е. вместо того, чтобы целиком писать выражение $ax^2 + bx + c$ пишут просто $f(x)$. Другими словами, запись $f(x)$ и $ax^2 + bx + c$ означает одно и то же.

Комментарий. Будет хорошо, если вы научитесь не путать следующие вещи:

- квадратный трёхчлен: это выражение $ax^2 + bx + c$; здесь три числа, одна переменная, нет никаких знаков равенств;
- квадратное уравнение: это уравнение $ax^2 + bx + c = 0$; здесь три числа, одна переменная, знак равенства, означающий уравнение;
- верное числовое равенство: это равенство чисел $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$; здесь четыре числа, нет переменных, а знак равенства означает [числовое] равенство;
- значение трёхчлена в точке x_0 : это число $ax_0^2 + bx_0 + c$; здесь четыре числа, нет переменных и знака равенства;
- определение функции: это равенство $f(x) = ax^2 + bx + c$; здесь три числа, одна переменная, а знак равенства означает, что это просто одно и то же, но по разному записанное;
- значение функции f в точке x_0 : это равенство $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$; здесь всё числа, нет переменных, знак равенства значит равенство чисел.

Вопрос для обсуждения. Посмотрим на уравнение (относительно переменной x)

$$ax^2 + bx + c = a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c.$$

Его ещё можно записать как $f(x) = f(7)$. Верно ли, что $x = 7$? Можно ли вообще писать $x = 7$? Если да, то что это значит? Если неверно, что $x = 7$, то что верно?

Определение. *Дискриминантом* квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ (или квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$) называется число $D = b^2 - 4ac$.

Утверждение. Дан квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, D — его дискриминант.

- Если $D > 0$, то корнями квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ (или квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$) являются числа

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

- Если $D = 0$, то у квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ будет один корень¹, равный $-\frac{b}{2a}$.
- Если $D < 0$, то у квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ (или квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$) не будет корней.

Утверждение. Если у квадратного трёхчлена имеются два корня x_1 и x_2 , то выполняется равенство

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Следствие (теорема Виета). Если у квадратного трёхчлена имеются два корня x_1 и x_2 , то выполняются равенства

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \quad (*)$$

Утверждение (теорема, обратная теореме Виета). Если для некоторых чисел x_1 и x_2 выполняются равенства (*), то x_1 и x_2 — все корни (возможно, совпадающие) квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

Вопрос для обсуждения. Что можно сказать в случае $D = 0$?

Вопрос для обсуждения. Если $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ и $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ для некоторых x_1 и x_2 , правда ли, что $x_1 x_2 = c/a$?

Вопрос для обсуждения. Правда ли, что если $a^2 - 4bc > 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?

¹ кратности 2, об этом мы говорить не будем; про квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ просто говорят, что у него один корень