

О раскрытии и закрытии скобок. 1 сентября

1. а) Сколькими способами можно составить слово из 10 букв a и 2 букв b ? Какой коэффициент при слагаемом $a^{10}b^2$ после раскрытия скобок в выражении $(a + b)^{12}$?

б) Какой коэффициент при слагаемом a^5b^2c после раскрытия скобок в выражении $(a + b + c)^8$?

2. Какое получится выражение после раскрытия скобок в выражении $(1+a+a^2+a^3+\dots+a^9)(1+a^{10}+a^{2\cdot 10}+\dots+a^{9\cdot 10})(1+a^{100}+a^{2\cdot 100}+\dots+a^{9\cdot 100})$?

3. Чему равняется сумма всех натуральных делителей числа $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$? А числа $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$?

4. а) Какой коэффициент будет при x^{2019} после раскрытия скобок в выражении $(x + 1)(x + 2) \dots (x + 2020)$? А при x^{2018} ?

б) Рассмотрим все возможные произведения нескольких из чисел $1, 2, \dots, 2020$. Произведение одного числа равно самому этому числу. Чему равна сумма всех этих произведений?

с) Пусть E — это сумма тех из произведений, в которых чётное число множителей, а O — нечётное. Чему равно $E - O$?

5. Для каждого натурального $n \geq 2$ вычислите сумму

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

(В знаменателях стоят все возможные произведения нескольких из чисел $1, 2, \dots, n$.)

6. На доске записаны 10 различных чисел. Петя вычислил все возможные произведения нескольких записанных чисел, взятых в нечетном количестве, сложил все эти произведения и полученную сумму записал на листок. Вася вычислил все возможные произведения нескольких чисел, записанных на доске, взятых в четном количестве, сложил все эти произведения и полученную сумму записал на свой листок. Оказалось, что сумма на листке Пети на 1 больше, чем сумма на листке Васи. Докажите, что одно из чисел, выписанных на доске, равно 1.

7. Имеется n натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Выпишем все числа, обратные к каждому из чисел, к каждому произведению двух чисел, к каждому произведению трёх чисел, \dots , к произведению всех чисел. При каких натуральных n сумма всех выписанных чисел может оказаться равна 1?

О раскрытии и закрытии скобок. 1 сентября

1. а) Сколькими способами можно составить слово из 10 букв a и 2 букв b ? Какой коэффициент при слагаемом $a^{10}b^2$ после раскрытия скобок в выражении $(a + b)^{12}$?

б) Какой коэффициент при слагаемом a^5b^2c после раскрытия скобок в выражении $(a + b + c)^8$?

2. Какое получится выражение после раскрытия скобок в выражении $(1+a+a^2+a^3+\dots+a^9)(1+a^{10}+a^{2\cdot 10}+\dots+a^{9\cdot 10})(1+a^{100}+a^{2\cdot 100}+\dots+a^{9\cdot 100})$?

3. Чему равняется сумма всех натуральных делителей числа $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$? А числа $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$?

4. а) Какой коэффициент будет при x^{2019} после раскрытия скобок в выражении $(x + 1)(x + 2) \dots (x + 2020)$? А при x^{2018} ?

б) Рассмотрим все возможные произведения нескольких из чисел $1, 2, \dots, 2020$. Произведение одного числа равно самому этому числу. Чему равна сумма всех этих произведений?

с) Пусть E — это сумма тех из произведений, в которых чётное число множителей, а O — нечётное. Чему равно $E - O$?

5. Для каждого натурального $n \geq 2$ вычислите сумму

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

(В знаменателях стоят все возможные произведения нескольких из чисел $1, 2, \dots, n$.)

6. На доске записаны 10 различных чисел. Петя вычислил все возможные произведения нескольких записанных чисел, взятых в нечетном количестве, сложил все эти произведения и полученную сумму записал на листок. Вася вычислил все возможные произведения нескольких чисел, записанных на доске, взятых в четном количестве, сложил все эти произведения и полученную сумму записал на свой листок. Оказалось, что сумма на листке Пети на 1 больше, чем сумма на листке Васи. Докажите, что одно из чисел, выписанных на доске, равно 1.

7. Имеется n натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Выпишем все числа, обратные к каждому из чисел, к каждому произведению двух чисел, к каждому произведению трёх чисел, \dots , к произведению всех чисел. При каких натуральных n сумма всех выписанных чисел может оказаться равна 1?