

Многочлены–1: коэффициенты и значения. 2 сентября

Определение. Многочленом степени n называется формальная запись вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, где a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 — действительные числа, называемые *коэффициентами* многочлена, $a_n \neq 0$, x — формальная переменная. Число a_n называется *старшим коэффициентом*, a_0 называется *свободным членом*.

Число 0 называется *нулевым многочленом*. Его степень неопределена (также иногда её полагают равной -1 или $-\infty$).

1. Пусть $\deg P = n$, $\deg Q = m$. Что можно сказать о степени многочлена $P + Q$? А многочлена $P \cdot Q$?

2. Найдите коэффициент многочлена $(x^8 + x^5 + 1)^{20}$ при а) x^{17} ; б) x^{18} .

3. Пусть P — ненулевой многочлен. Могут ли все коэффициенты многочлена $P(x) \cdot (x - 1)$ быть неотрицательными?

4. Коэффициентами многочленов нечётной степени P и Q являются нечётные числа. Докажите, что у многочлена $P \cdot Q$ есть хотя бы один чётный коэффициент.

Определение. Многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ задает функцию $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, значение которой в точке x_0 равно $P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_0$.

Число x_0 называется *корнем* многочлена P , если $P(x_0) = 0$.

5. а) Выразите числа $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$ через коэффициенты многочлена P .

б) Найдите сумму коэффициентов многочленов $(x + 2)^n$, $(x^2 - x + 1)^n$.

с) Найдите сумму коэффициентов при чётных степенях этих многочленов.

6. Решите задачи 3. и 4. другим способом.

7. а) $P(x) = (1 + x\sqrt{2})^{100}$. Докажите, что число $P(1) + P(-1)$ — целое.

б) Вычислите $C_{100}^0 + 3^2 C_{100}^2 + \dots + 3^{100} C_{100}^{100}$.

Многочлены–1: коэффициенты и значения. 2 сентября

Определение. Многочленом степени n называется формальная запись вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, где a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 — действительные числа, называемые *коэффициентами* многочлена, $a_n \neq 0$, x — формальная переменная. Число a_n называется *старшим коэффициентом*, a_0 называется *свободным членом*.

Число 0 называется *нулевым многочленом*. Его степень неопределена (также иногда её полагают равной -1 или $-\infty$).

1. Пусть $\deg P = n$, $\deg Q = m$. Что можно сказать о степени многочлена $P + Q$? А многочлена $P \cdot Q$?

2. Найдите коэффициент многочлена $(x^8 + x^5 + 1)^{20}$ при а) x^{17} ; б) x^{18} .

3. Пусть P — ненулевой многочлен. Могут ли все коэффициенты многочлена $P(x) \cdot (x - 1)$ быть неотрицательными?

4. Коэффициентами многочленов нечётной степени P и Q являются нечётные числа. Докажите, что у многочлена $P \cdot Q$ есть хотя бы один чётный коэффициент.

Определение. Многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ задает функцию $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, значение которой в точке x_0 равно $P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_0$.

Число x_0 называется *корнем* многочлена P , если $P(x_0) = 0$.

5. а) Выразите числа $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$ через коэффициенты многочлена P .

б) Найдите сумму коэффициентов многочленов $(x + 2)^n$, $(x^2 - x + 1)^n$.

с) Найдите сумму коэффициентов при чётных степенях этих многочленов.

6. Решите задачи 3. и 4. другим способом.

7. а) $P(x) = (1 + x\sqrt{2})^{100}$. Докажите, что число $P(1) + P(-1)$ — целое.

б) Вычислите $C_{100}^0 + 3^2 C_{100}^2 + \dots + 3^{100} C_{100}^{100}$.