

**Многочлены–2: теорема Безу. 3 сентября**

**Определение.** Многочлен  $A$  делится на ненулевой многочлен  $B$ , если существует многочлен  $Q$ , называемый *частным* такой, что  $A = B \cdot Q$ .

**Определение.** Разделить многочлен  $A$  на ненулевой многочлен  $B$  с остатком — это найти многочлены  $Q, R$  такие, что выполнено равенство  $A = B \cdot Q + R$ , причем  $\deg R < \deg B$ <sup>1</sup>. Многочлен  $Q$  называется *неполным частным*, многочлен  $R$  называется *остатком*.

1. а) Поделите многочлен  $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$  в столбик на  $x^2 - 3x + 2$ . При каких  $a$  и  $b$  остаток будет равен нулю?

б) При каких  $n$  многочлен  $x^n + x + 1$  делится на многочлен  $x^2 + x + 1$ ?  
Указание: начните делить в столбик.

2. Алгоритм деления «в столбик» даёт нам пример каких-то  $Q$  и  $R$ , для которых  $A = B \cdot Q + R$ . Докажите, что других  $Q$  и  $R$  быть не может, т.е. докажите, что неполное частное и остаток при делении  $A$  на  $B$  определяются однозначно. Указание: предположите противное.

3. а) Разделите многочлен  $x^{100}$  на  $x - 1$  и  $x + 1$  с остатком.  
б) Чему равны остатки при делении многочлена  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  на многочлены  $x - 1$  и  $x + 1$ ? Сформулируйте и докажите признаки делимости на эти многочлены. Признаки делимости на какие числа они вам напоминают?

4 (теорема Безу). Докажите, что остаток от деления многочлена  $P(x)$  на  $x - a$  равен  $P(a)$ , т.е.  $P(x) = Q(x)(x - a) + P(a)$ . Выведите из этого, что число  $a$  является корнем многочлена  $P(x)$  тогда и только тогда, когда  $P(x)$  делится на  $x - a$ .

5. а) Докажите, что если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — различные корни многочлена  $P$ , то он делится на многочлен  $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ . Верно ли обратное утверждение?

б) При каких  $a$  и  $b$  многочлен  $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$  делится на многочлен  $(x - 1)(x - 2)$ ?

6. а) Докажите, что многочлен степени  $n$  имеет не более  $n$  различных корней. б) Докажите, что если значения двух многочленов степени не выше  $n$  совпадают в  $n + 1$  точке, то и сами многочлены равны.

7. Пусть  $a, b, c$  — натуральные числа. Верно ли, что обязательно существует квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами, который в некоторых целых точках принимает значения  $a^3, b^3, c^3$ ?

<sup>1</sup>или  $R = 0$ **Многочлены–2: теорема Безу. 3 сентября**

**Определение.** Многочлен  $A$  делится на ненулевой многочлен  $B$ , если существует многочлен  $Q$ , называемый *частным* такой, что  $A = B \cdot Q$ .

**Определение.** Разделить многочлен  $A$  на ненулевой многочлен  $B$  с остатком — это найти многочлены  $Q, R$  такие, что выполнено равенство  $A = B \cdot Q + R$ , причем  $\deg R < \deg B$ <sup>1</sup>. Многочлен  $Q$  называется *неполным частным*, многочлен  $R$  называется *остатком*.

1. а) Поделите многочлен  $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$  в столбик на  $x^2 - 3x + 2$ . При каких  $a$  и  $b$  остаток будет равен нулю?

б) При каких  $n$  многочлен  $x^n + x + 1$  делится на многочлен  $x^2 + x + 1$ ?  
Указание: начните делить в столбик.

2. Алгоритм деления «в столбик» даёт нам пример каких-то  $Q$  и  $R$ , для которых  $A = B \cdot Q + R$ . Докажите, что других  $Q$  и  $R$  быть не может, т.е. докажите, что неполное частное и остаток при делении  $A$  на  $B$  определяются однозначно. Указание: предположите противное.

3. а) Разделите многочлен  $x^{100}$  на  $x - 1$  и  $x + 1$  с остатком.  
б) Чему равны остатки при делении многочлена  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  на многочлены  $x - 1$  и  $x + 1$ ? Сформулируйте и докажите признаки делимости на эти многочлены. Признаки делимости на какие числа они вам напоминают?

4 (теорема Безу). Докажите, что остаток от деления многочлена  $P(x)$  на  $x - a$  равен  $P(a)$ , т.е.  $P(x) = Q(x)(x - a) + P(a)$ . Выведите из этого, что число  $a$  является корнем многочлена  $P(x)$  тогда и только тогда, когда  $P(x)$  делится на  $x - a$ .

5. а) Докажите, что если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — различные корни многочлена  $P$ , то он делится на многочлен  $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ . Верно ли обратное утверждение?

б) При каких  $a$  и  $b$  многочлен  $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$  делится на многочлен  $(x - 1)(x - 2)$ ?

6. а) Докажите, что многочлен степени  $n$  имеет не более  $n$  различных корней. б) Докажите, что если значения двух многочленов степени не выше  $n$  совпадают в  $n + 1$  точке, то и сами многочлены равны.

7. Пусть  $a, b, c$  — натуральные числа. Верно ли, что обязательно существует квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами, который в некоторых целых точках принимает значения  $a^3, b^3, c^3$ ?

<sup>1</sup>или  $R = 0$