НОД и НОК. 4 сентября

1. Натуральные числа x, y, z таковы, что $\text{НОД}(x, y) = z$ и $\text{НОК}(y, z) = x$. Докажите, что $x = y = z$.

2. Докажите, что наименьшее общее кратное $[a, b]$ и наибольший общий делитель (a, b) любых двух натуральных чисел a и b удовлетворяют неравенству $a(a, b) + b[a, b] \geqslant 2ab$.

3. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что $\text{НОК}(a, b, c) = a+b+c$. Докажите, что среди чисел a, b, c есть чётное число.

4. Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, n, где $n > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

5. Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждых двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Обязательно ли все три числа равны?

6. Для натуральных чисел a и b выполняется неравенство

$$a \cdot \text{НОД}(a, b) + b \cdot \text{НОК}(a, b) < 2{,}5ab.$$

Докажите, что a делится на b.

7. Существуют ли такие попарно различные натуральные числа a, b и c, что $2a + \text{НОК}(b, c) = 2b + \text{НОК}(a, c) = 2c + \text{НОК}(a, b)$?

8. Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОК}(m, n) + \text{НОД}(m, n) = m + n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

9. Существуют ли пять последовательных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых является точным квадратом?

10. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

11. Верно ли, что среди любых шести натуральных чисел найдется три числа, наименьшее общее кратное которых делится на наибольший общий делитель остальных трех чисел?

12. Существует ли такие различные натуральные числа a и b и натуральное число n, что $[a + n, b] = [a, b + n]$?

«Сириус», сентябрьская математическая программа – 2020, 10 класс

НОД и НОК. 4 сентября

1. Натуральные числа x, y, z таковы, что $\text{НОД}(x, y) = z$ и $\text{НОК}(y, z) = x$. Докажите, что $x = y = z$.

2. Докажите, что наименьшее общее кратное $[a, b]$ и наибольший общий делитель (a, b) любых двух натуральных чисел a и b удовлетворяют неравенству $a(a, b) + b[a, b] \geqslant 2ab$.

3. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что $\text{НОК}(a, b, c) = a+b+c$. Докажите, что среди чисел a, b, c есть чётное число.

4. Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, n, где $n > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

5. Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждых двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Обязательно ли все три числа равны?

6. Для натуральных чисел a и b выполняется неравенство

$$a \cdot \text{НОД}(a, b) + b \cdot \text{НОК}(a, b) < 2{,}5ab.$$

Докажите, что a делится на b.

7. Существуют ли такие попарно различные натуральные числа a, b и c, что $2a + \text{НОК}(b, c) = 2b + \text{НОК}(a, c) = 2c + \text{НОК}(a, b)$?

8. Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОК}(m, n) + \text{НОД}(m, n) = m + n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

9. Существуют ли пять последовательных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых является точным квадратом?

10. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

11. Верно ли, что среди любых шести натуральных чисел найдется три числа, наименьшее общее кратное которых делится на наибольший общий делитель остальных трех чисел?

12. Существует ли такие различные натуральные числа a и b и натуральное число n, что $[a + n, b] = [a, b + n]$?