

Многочлен не может иметь много корней. 5 сентября

1. Найдите все многочлены $P(x)$ такие, что $P(t+1) = P(t)$ для каждого действительного t .

2. Про многочлен $P(x)$ известно, что $P(t) = P(-t)$ для любого действительного t . Докажите, что $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_0$.

3. Существует ли многочлен такой, что $P(n) = S(n)$ для каждого натурального n ? Через $S(n)$ обозначена сумма цифр числа n .

4. Даны три квадратных многочлена с положительными старшими коэффициентами. Известно, что сумма любых двух имеет общий корень с третьим. Докажите, что все три многочлена имеют общий корень.

5. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k .

6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$. На плоскости нарисовали графики $y = P(x)$ и $x = P(y)$, сдвинутые на некоторые векторы. Оказалось, что n из общих точек сдвинутых графиков лежат на прямой $y = x$. Докажите, что сдвинутые графики симметричны относительно этой прямой.

7. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

Многочлен не может иметь много корней. 5 сентября

1. Найдите все многочлены $P(x)$ такие, что $P(t+1) = P(t)$ для каждого действительного t .

2. Про многочлен $P(x)$ известно, что $P(t) = P(-t)$ для любого действительного t . Докажите, что $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_0$.

3. Существует ли многочлен такой, что $P(n) = S(n)$ для каждого натурального n ? Через $S(n)$ обозначена сумма цифр числа n .

4. Даны три квадратных многочлена с положительными старшими коэффициентами. Известно, что сумма любых двух имеет общий корень с третьим. Докажите, что все три многочлена имеют общий корень.

5. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k .

6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$. На плоскости нарисовали графики $y = P(x)$ и $x = P(y)$, сдвинутые на некоторые векторы. Оказалось, что n из общих точек сдвинутых графиков лежат на прямой $y = x$. Докажите, что сдвинутые графики симметричны относительно этой прямой.

7. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.