Выделение особых подмножеств, простого объекта. 8 сентября

1. *Диаметром* многоугольника называется наибольшее расстояние между его точками. Можно ли квадрат со стороной 1 разбить на три многоугольника, диаметр каждого из которых меньше 1?

2. Квадрат со стороной 1 разбит на две части. Докажите, что в одной из частей можно выбрать две точки, расстояние между которыми не меньше $\sqrt{5}/2$.

3. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 вырезали 99 квадратиков 2×2. Докажите, что из него можно вырезать ещё один такой квадратик.

4. Правильный треугольник ABC полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками. Докажите, что треугольник ABC можно полностью покрыть четырмя такими треугольниками.

5. На шахматной доске отмечены центры всех полей. Можно ли тринадцатью прямыми разбить доску на части так, чтобы внутри каждой из них лежало не более одной отмеченной точки?

6. В правильном десятиугольнике $A_1A_2A_3 \ldots A_{10}$ провели все диагонали. Около каждого пересечения двух или нескольких диагоналей[1] поставлено число $+1$. Одной операцией можно изменить знак всех чисел, стоящих около точек пересечения с одной диагональю. Можно ли применением конечного числа таких операций изменить знаки у всех имеющихся чисел?

7. Дан куб со стороной 4. Можно ли целиком оклеить три его грани, имеющие общую вершину, 16 бумажными прямоугольными полосками размера 1×3?

[1] давайте считать, что пересечения только по внутренним точками

«Сириус», сентябрьская математическая программа – 2020, 10 класс

Выделение особых подмножеств, простого объекта. 8 сентября

1. *Диаметром* многоугольника называется наибольшее расстояние между его точками. Можно ли квадрат со стороной 1 разбить на три многоугольника, диаметр каждого из которых меньше 1?

2. Квадрат со стороной 1 разбит на две части. Докажите, что в одной из частей можно выбрать две точки, расстояние между которыми не меньше $\sqrt{5}/2$.

3. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 вырезали 99 квадратиков 2×2. Докажите, что из него можно вырезать ещё один такой квадратик.

4. Правильный треугольник ABC полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками. Докажите, что треугольник ABC можно полностью покрыть четырмя такими треугольниками.

5. На шахматной доске отмечены центры всех полей. Можно ли тринадцатью прямыми разбить доску на части так, чтобы внутри каждой из них лежало не более одной отмеченной точки?

6. В правильном десятиугольнике $A_1A_2A_3 \ldots A_{10}$ провели все диагонали. Около каждого пересечения двух или нескольких диагоналей[1] поставлено число $+1$. Одной операцией можно изменить знак всех чисел, стоящих около точек пересечения с одной диагональю. Можно ли применением конечного числа таких операций изменить знаки у всех имеющихся чисел?

7. Дан куб со стороной 4. Можно ли целиком оклеить три его грани, имеющие общую вершину, 16 бумажными прямоугольными полосками размера 1×3?

[1] давайте считать, что пересечения только по внутренним точками