Многочлен не может иметь много корней–2. 9 сентября

1. Упростите (устно!) выражения

a) $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$

b) $c\cdot\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+a\cdot\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\cdot\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$

c) $\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}$.

2. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трёхчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трёхчлена.

3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет 100 различных целых корней. Многочлен $Q(x)$ степени не ниже первой с целыми коэффициентами — делитель $P(x)+2012$. Докажите, что степень $Q(x)$ не меньше 9.

4. Существуют ли такая последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3, ... и такой непостоянный многочлен $P(x)$, что $a_m+a_n=P(mn)$ для любых натуральных m и n?

5. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $n(P)$ количество решений уравнения $(P(x))^2=1$ в целых числах. Докажите, что $n(P)\leqslant\deg P+2$.

«Сириус», сентябрьская математическая программа – 2020, 10 класс

Многочлен не может иметь много корней–2. 9 сентября

1. Упростите (устно!) выражения

a) $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$

b) $c\cdot\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+a\cdot\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\cdot\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$

c) $\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}$.

2. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трёхчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трёхчлена.

3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет 100 различных целых корней. Многочлен $Q(x)$ степени не ниже первой с целыми коэффициентами — делитель $P(x)+2012$. Докажите, что степень $Q(x)$ не меньше 9.

4. Существуют ли такая последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3, ... и такой непостоянный многочлен $P(x)$, что $a_m+a_n=P(mn)$ для любых натуральных m и n?

5. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $n(P)$ количество решений уравнения $(P(x))^2=1$ в целых числах. Докажите, что $n(P)\leqslant\deg P+2$.