Многочлены-5: интерполяция. 11 сентября

1. а) Докажите, что для любых попарно различных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n и любых чисел y_1, y_2, $\ldots$, y_n существует многочлен P степени не выше $n-1$ такой, что $P(x_i) = y_i$. *Указание: см. задачу* **1.** *предыдущего листочка.*
b) Пусть Q — другой многочлен такой, что $Q(x_i) = y_i$. Как связаны многочлены P и Q? Дополните фразу «многочлен P — … при делении многочлена Q на многочлен …». Докажите, что многочлен, описанный в пункте а), единственный.

2. а) Есть 25 футболистов, у каждого из них есть рейтинг r_1, r_2, $\ldots$, r_{25}, все рейтинги попарно различны. Тренер хочет выбрать из них в команду 11 любимчиков. Для этого он придумывает многочлен P, для каждого спортсмена вычисляет его *спортивный потенциал* $P(r_i)$ и выбирает игроков с максимальным потенциалом. Докажите, что ему хватит многочлена 24-ой степени.
b) На плоскости отмечены 2020 точек, их абсциссы различны, каждая из точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Скажем, что многочлен $P(x)$ *разделяет* эти точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот; на самом графике могут лежать точки обоих цветов. Докажите, что всегда можно построить разделяющий многочлен не выше 2018-й степени.

3. Докажите, что если многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения, то и все его коэффициенты рациональные.

4. Пусть a, b, c — попарно различные целые числа. Докажите, что число

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$$

целое.

5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n такой, что $P(k) = \dfrac{1}{C_{n+1}^k}$ для всех k от 0 до n. Найдите $P(n+1)$.

---

6. Пусть $P(x)$ — приведённый многочлен степени n. Ильнур посчитал его значения в $n+1$ различных целых точках. Докажите, что одно из полученных Ильнуром чисел по модулю хотя бы $n!/2^n$.

7. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ степени n такой, что $P(0)$, $P(1)$, $\ldots$, $P(n)$ — различные степени двойки?

«Сириус», сентябрьская математическая программа – 2020, 10 класс

Многочлены-5: интерполяция. 11 сентября

1. а) Докажите, что для любых попарно различных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n и любых чисел y_1, y_2, $\ldots$, y_n существует многочлен P степени не выше $n-1$ такой, что $P(x_i) = y_i$. *Указание: см. задачу* **1.** *предыдущего листочка.*
b) Пусть Q — другой многочлен такой, что $Q(x_i) = y_i$. Как связаны многочлены P и Q? Дополните фразу «многочлен P — … при делении многочлена Q на многочлен …». Докажите, что многочлен, описанный в пункте а), единственный.

2. а) Есть 25 футболистов, у каждого из них есть рейтинг r_1, r_2, $\ldots$, r_{25}, все рейтинги попарно различны. Тренер хочет выбрать из них в команду 11 любимчиков. Для этого он придумывает многочлен P, для каждого спортсмена вычисляет его *спортивный потенциал* $P(r_i)$ и выбирает игроков с максимальным потенциалом. Докажите, что ему хватит многочлена 24-ой степени.
b) На плоскости отмечены 2020 точек, их абсциссы различны, каждая из точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Скажем, что многочлен $P(x)$ *разделяет* эти точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот; на самом графике могут лежать точки обоих цветов. Докажите, что всегда можно построить разделяющий многочлен не выше 2018-й степени.

3. Докажите, что если многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения, то и все его коэффициенты рациональные.

4. Пусть a, b, c — попарно различные целые числа. Докажите, что число

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$$

целое.

5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n такой, что $P(k) = \dfrac{1}{C_{n+1}^k}$ для всех k от 0 до n. Найдите $P(n+1)$.

---

6. Пусть $P(x)$ — приведённый многочлен степени n. Ильнур посчитал его значения в $n+1$ различных целых точках. Докажите, что одно из полученных Ильнуром чисел по модулю хотя бы $n!/2^n$.

7. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ степени n такой, что $P(0)$, $P(1)$, $\ldots$, $P(n)$ — различные степени двойки?