«Причёсывание» задач. 12 сентября

1. На складе лежат 300 сапог: 100 резиновых, 100 кирзовых, 100 яловых. Среди них поровну левых и правых. Докажите, что имеющихся сапогов можно составить 50 правильных пар.

2. Для неотрицательных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\} \leqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

3. Число 2020 представили в виде суммы нескольких натуральных чисел. Какое наибольшее произведение могут иметь эти числа?

4. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше $2/5$. Докажите, что во всём классе мальчиков не больше $4/7$.

5. Алфавит некоторого языка состоит из n букв. Известно, что ни одно слово не является началом другого. a_k — число слов языка, состоящих из k букв. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k} \leqslant 1.$$

6. Внутри правильного n-угольника взята точка. Все её проекции на стороны попали во внутренние точки сторон и (вместе с вершинами) разбили периметр на $2n$ отрезков. Докажите, что сумма длин отрезков через один равна полупериметру n-угольника.

7. На симпозиуме каждый делегат знаком хотя бы с одним из остальных участников, но при этом для любых двух делегатов найдется третий, не знакомый ни с одним из них. Докажите, что всех делегатов можно разбить на три непустые группы так, чтобы каждый участник симпозиума был знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.

«Сириус», сентябрьская математическая программа – 2020, 10 класс

«Причёсывание» задач. 12 сентября

1. На складе лежат 300 сапог: 100 резиновых, 100 кирзовых, 100 яловых. Среди них поровну левых и правых. Докажите, что имеющихся сапогов можно составить 50 правильных пар.

2. Для неотрицательных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\} \leqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

3. Число 2020 представили в виде суммы нескольких натуральных чисел. Какое наибольшее произведение могут иметь эти числа?

4. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше $2/5$. Докажите, что во всём классе мальчиков не больше $4/7$.

5. Алфавит некоторого языка состоит из n букв. Известно, что ни одно слово не является началом другого. a_k — число слов языка, состоящих из k букв. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k} \leqslant 1.$$

6. Внутри правильного n-угольника взята точка. Все её проекции на стороны попали во внутренние точки сторон и (вместе с вершинами) разбили периметр на $2n$ отрезков. Докажите, что сумма длин отрезков через один равна полупериметру n-угольника.

7. На симпозиуме каждый делегат знаком хотя бы с одним из остальных участников, но при этом для любых двух делегатов найдется третий, не знакомый ни с одним из них. Докажите, что всех делегатов можно разбить на три непустые группы так, чтобы каждый участник симпозиума был знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.