

Многочлены–6: многочлен большой. 14 сентября

1. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Докажите, что если $|t| > \max \left\{ 1, \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{|a_n|} \right\}$, то числа $P(t)$ и $a_n t^n$ одного знака.

2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена, причём $\deg P > \deg Q$. Докажите, что

- а) при всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}$ выполнено $|P(t)| > |Q(t)|$.
- б) при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $(1 + 1)^n > |P(n)|$.
- в) при всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}$ выполнено $(1 + 1)^t > |P(t)|$.

Факт (без доказательства). Пусть $P(x)$ — многочлен с положительным старшим коэффициентом, $\deg P > 0$. Тогда, начиная с некоторого момента он возрастает.

3. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, для которых неравенство $P(a - 1)P(a + 1) > P(a)^2 - 1$ выполнено при всех вещественных a .

4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, a_2, \dots , такова, что при всех натуральных $n \geq 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \dots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N , что в бесконечной последовательности a_N, a_{N+1}, \dots , каждый член меньше предыдущего.

5. Для некоторого многочлена существует бесконечное множество его значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках. Докажите, что существует не более одного целого значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке.

Многочлены–6: многочлен большой. 14 сентября

1. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Докажите, что если $|t| > \max \left\{ 1, \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{|a_n|} \right\}$, то числа $P(t)$ и $a_n t^n$ одного знака.

2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена, причём $\deg P > \deg Q$. Докажите, что

- а) при всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}$ выполнено $|P(t)| > |Q(t)|$.
- б) при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $(1 + 1)^n > |P(n)|$.
- в) при всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}$ выполнено $(1 + 1)^t > |P(t)|$.

Факт (без доказательства). Пусть $P(x)$ — многочлен с положительным старшим коэффициентом, $\deg P > 0$. Тогда, начиная с некоторого момента он возрастает.

3. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, для которых неравенство $P(a - 1)P(a + 1) > P(a)^2 - 1$ выполнено при всех вещественных a .

4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, a_2, \dots , такова, что при всех натуральных $n \geq 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \dots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N , что в бесконечной последовательности a_N, a_{N+1}, \dots , каждый член меньше предыдущего.

5. Для некоторого многочлена существует бесконечное множество его значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках. Докажите, что существует не более одного целого значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке.