Многочлены–7: многочлены с целыми коэффициентами. 16 сентября

1. a) Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что для любых целых чисел a и b число $P(a)-P(b)$ делится на $a-b$, другими словами, $P(a) \equiv P(b) \pmod{a-b}$.
b) Многочлен с целыми коэффициентами в трех целых точках принимает значения 2. Может ли он принимать в какой-то целой точке значение 3?

2. Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами. На его графике отмечены две точки A и B, все координаты которых — целые. Докажите, что если длина отрезка AB целая, то AB параллелен оси абсцисс.

3. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках равен ± 1. Докажите, что его нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

4. Докажите, что для любого непостоянного многочлена P с целыми коэффициентами найдётся такое натуральное число n, что $P(n)$, что $P(n)$ — составное число[1].

5. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k.

6. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что существует различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$, для которых $P(x_1) = x_2$, $P(x_2) = x_3$, $\ldots$, $P(x_n) = x_1$.

7. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

[1] давайте считать, что, возможно, отрицательное

«Сириус», сентябрьская математическая программа – 2020, 10 класс

Многочлены–7: многочлены с целыми коэффициентами. 16 сентября

1. a) Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что для любых целых чисел a и b число $P(a)-P(b)$ делится на $a-b$, другими словами, $P(a) \equiv P(b) \pmod{a-b}$.
b) Многочлен с целыми коэффициентами в трех целых точках принимает значения 2. Может ли он принимать в какой-то целой точке значение 3?

2. Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами. На его графике отмечены две точки A и B, все координаты которых — целые. Докажите, что если длина отрезка AB целая, то AB параллелен оси абсцисс.

3. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках равен ± 1. Докажите, что его нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

4. Докажите, что для любого непостоянного многочлена P с целыми коэффициентами найдётся такое натуральное число n, что $P(n)$, что $P(n)$ — составное число[1].

5. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k.

6. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что существует различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$, для которых $P(x_1) = x_2$, $P(x_2) = x_3$, $\ldots$, $P(x_n) = x_1$.

7. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

[1] давайте считать, что, возможно, отрицательное