Список вопросов и избранных задач к теоретическому зачёту. 18 сентября

1. Раскрытие скобок: бином Ньютона; полином Ньютона.

2. Раскрытие скобок: теорема Виета; сумма всех делителей натурального числа.

3. Многочлены: деление с остатком, его единственность; теорема Безу.

4. Многочлены: количество корней; многочлены, совпадающие как функции, совпадают и как выражения.

5. Многочлены: интерполяционный многочлен Ньютона.

6. Многочлены: интерполяционный многочлен Лагражна.

7. Многочлены: описание всех многочленов, совпадающих в нескольких точках; совпадение различных интерполяционных многочленов.

8. Многочлены с целыми коэффициентами: если многочлен с целыми коэффициентами представляется в виде произведения двух многочленов с рациональными коэффициентами, то он представляется и в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами.

9. Многочлены: теорема Безу для многочленов с целыми коэффициентами; когда остаток и неполное частное при делении одного многочлена с целыми коэффициентами на другой будут иметь целые коэффициенты?

10. Многочлены: знак многочлена и его старшего слагаемого совпадают при достаточно больших значениях аругмента.

11. Многочлены: многочлен большей степени при достаточно больших значениях аргумента больше.

12. Многочлен: показательная функция при достаточно больших значениях аргумента больше наперёд заданного многочлена.

13. НОД и НОК: степени вхождения простых чисел в НОД и НОК; $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$.

14. Лемма о трезубце.

15. В треугольнике ABC угол B равен β. Чему равны углы AIC, AHC, AOC, AI_bC?

16. Теорема о секущих/хордах; теорема о касательной и секущей; понятие степени точки относительно окружности. Признак вписанности через степень точки.

17. Гомотетия: определение и свойства; гомотетичность двух непересекающихся окружностей; гомотетичность двух касающихся окружностей;

18. Гомотетия: гомотетичность двух параллельных отрезков; гомотетичность двух треугольников, соответственные стороны которых параллельны.

19. Теорема синусов.

20. Теорема Сильвестра.

Избранные задачи

1. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

2. Существуют ли такая последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$ и такой непостоянный многочлен $P(x)$, что $a_m + a_n = P(mn)$ для любых натуральных m и n?

3. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n такой, что $P(k) = \dfrac{1}{C_{n+1}^k}$ для всех k от 0 до n. Найдите $P(n+1)$.

4. Докажите, что если многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения, то и все его коэффициенты рациональные.

5. Докажите, что для любого непостоянного многочлена P с целыми коэффициентами найдётся такое натуральное число n, что $|P(n)|$ — составное число.

6. Существуют ли пять последовательных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых является точным квадратом?

7. Верно ли, что среди любых шести натуральных чисел найдется три числа, наименьшее общее кратное которых делится на наибольший общий делитель остальных трех чисел?

8. Докажите, что если в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ имеют место равенства $\angle ABC = \angle ADE$ и $\angle AEC = \angle ADB$, то $\angle BAC = \angle DAE$.

9. Высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H; O – центр описанной окружности треугольника BHC. Центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке OA. Найдите угол BAC.

10. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность ω проходит через точки A и D и пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим через X и Y отражения точек P и Q относительно середин отрезков AB и AC соответственно. Докажите, что точки B, C, X и Y лежат на одной окружности.

11. На окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$, отмечены точки M и N — середины дуг AB и CD соответственно. Докажите, что MN делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанных окружностей треугольников ABC и ADC.

12. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Пусть M и N – середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PMQ и PNQ равна 180^o.

13. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ из вершины D на прямые BC, AC и AB опущены перпендикуляры с основаниями P, Q и R соответственно. Докажите, что $PQ = QR$ тогда и только тогда, когда биссектрисы углов ABC и ADC пересекаются на прямой AC.

14. Сторона BC треугольника ABC касается вписанной в него окружности в точке D. Докажите, что центр окружности лежит на прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD.

15. Десять королей обошли всю доску и вернулись в исходные клетки. Каждый король побывал ровно один раз на каждой клетке. Докажите, что был момент, когда каждый король был не на своем месте. За ход ровно один король ходит на соседнююю по стороне или диагонали клетку.

16. Известно, что если у двух жителей деревни поровну знакомых среди односельчан, то общих знакомых у них нет. Докажите, что найдётся житель, у которого ровно один знакомый односельчанин.

17. На планете находятся государства, в каждом из которых правит партия левых или партия правых. Раз в год в каком-нибудь одном государстве происходит революция: правящая в нём партия становится такой, как в большинстве соседних с ним государств, если это государство от них, конечно, отличается (если соседей каждого вида поровну, революции не случается). Докажите, что рано или поздно революции прекратятся.

18. Несколько детей собрали поровну шишек. Время от времени какие-то дети раздают каждому из остальных поровну из своих шишек. После многократного повторения такой процедуры у Маши осталось 23 шишки, а у Коли — 6 шишек. Сколько было детей?

19. На доске размером 15×15 клеток расставили 15 ладей, не бьющих друг друга. Затем каждую ладью передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи будут бить друг друга.

20. По кругу записаны 6 чисел: пять нулей и единица. За ход можно к двум соседним прибавить по одинаковому действительному числу. Можно ли все числа сделать равными?

21. По кругу лежат 500 монет: 5 орлом, 5 решкой, 5 орлом, 5 решкой и т. д. Разрешается перевернуть монету, если один из её соседей лежит орлом, а другой - решкой. Какого наибольшего числа монет, одновременно лежащих орлом, можно добиться с помощью таких операций?

22. На шахматной доске отмечены центры всех полей. Можно ли тринадцатью прямыми разбить доску на части так, чтобы внутри каждой из них лежало не более одной отмеченной точки?

23. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше $2/5$. Докажите, что во всём классе мальчиков не больше $4/7$.