2. Профессиональный разнобой. 18 октября

1. На доске написаны n единиц. Петя и Вася ходят по очереди (начинает Петя). При своем ходе игрок может стереть с доски любые два взаимно простых числа и записать на доску их сумму. Проигрывает не имеющий хода. Для каждого натурального n определите, кто выиграет при правильной игре.

2. В некоторых клетках доски 2020×2020 провели по одной диагонали. Луч, падающий на проведенную диагональ с любой стороны, отражается от неё по правилу «угол падения равен углу отражения». В середине левой стороны левой клетки каждой строки установлен лазер, луч которого выходит вправо, а в середине правой стороны правой клетки каждой строки — лазер, луч которого выходит влево. Луч каждого лазера имеет номер, равный номеру строки, в которой он начинается (строки пронумерованы сверху вниз). Луч становится *красным*, если он выходит из доски через верхнюю её сторону, и *зелёным*, если через нижнюю. Известно, что каждый луч стал зелёным или красным. Докажите, что сумма номеров красных лучей меньше или равна сумме номеров зелёных.

3. В каждом узле бесконечной клетчатой доски со стороной 1 растёт дерево. Два лесоруба нашли бревно длиной 100, которое лежит параллельно горизонтальным линиям доски. Могут ли они его повернуть так, чтобы оно лежало параллельно вертикальным линиям доски? Толщиной бревна и деревьев можно пренебречь.

4. В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k > 3)$ с натуральными членами $a_{n+1} = \text{НОК}(a_n, a_{n-1}) - \text{НОК}(a_{n-1}, a_{n-2})$, $n \geqslant 3$. Докажите, что $k \leqslant a_3 + 3$.

5. Существует ли натуральное число n, для которого числа $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$ можно по крайней мере 2020 способами разбить на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была точным квадратом?

Не забудьте перевернуть листочек!

«Сириус», октябрьская математическая программа – 2020, группа 10А

2. Профессиональный разнобой. 18 октября

1. На доске написаны n единиц. Петя и Вася ходят по очереди (начинает Петя). При своем ходе игрок может стереть с доски любые два взаимно простых числа и записать на доску их сумму. Проигрывает не имеющий хода. Для каждого натурального n определите, кто выиграет при правильной игре.

2. В некоторых клетках доски 2020×2020 провели по одной диагонали. Луч, падающий на проведенную диагональ с любой стороны, отражается от неё по правилу «угол падения равен углу отражения». В середине левой стороны левой клетки каждой строки установлен лазер, луч которого выходит вправо, а в середине правой стороны правой клетки каждой строки — лазер, луч которого выходит влево. Луч каждого лазера имеет номер, равный номеру строки, в которой он начинается (строки пронумерованы сверху вниз). Луч становится *красным*, если он выходит из доски через верхнюю её сторону, и *зелёным*, если через нижнюю. Известно, что каждый луч стал зелёным или красным. Докажите, что сумма номеров красных лучей меньше или равна сумме номеров зелёных.

3. В каждом узле бесконечной клетчатой доски со стороной 1 растёт дерево. Два лесоруба нашли бревно длиной 100, которое лежит параллельно горизонтальным линиям доски. Могут ли они его повернуть так, чтобы оно лежало параллельно вертикальным линиям доски? Толщиной бревна и деревьев можно пренебречь.

4. В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k > 3)$ с натуральными членами $a_{n+1} = \text{НОК}(a_n, a_{n-1}) - \text{НОК}(a_{n-1}, a_{n-2})$, $n \geqslant 3$. Докажите, что $k \leqslant a_3 + 3$.

5. Существует ли натуральное число n, для которого числа $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$ можно по крайней мере 2020 способами разбить на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была точным квадратом?

Не забудьте перевернуть листочек!

6. Среди k последовательных натуральных чисел нашлись 13 попарно взаимно простых. Найдите наименьшее возможное значение k.

7. При каких n выпуклый n-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы из каждой вершины исходило чётное число диагоналей?

8. Бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$ такова, что каждое натуральное число в ней встречается ровно один раз. Обязательно ли найдётся такое натуральное n, что среди чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n встречаются все натуральные числа от 1 до n?

9. В Президентском Физико-Математическом Узилище есть 2020 камер, занумерованных числами от 1 до 2020, а также 2020 ключников, k-й из которых умеет менять состояние (т.е. открытые закрывать, а закрытые открывать) всех камер, номера которых делятся на k. В каждой камере сидит по одному узнику. Европейский суд по правам человека может потребовать от президента освободить любых узников по своему выбору. Освобождения каких узников должен потребовать ЕСПЧ, чтобы количество ключников, которых необходимо будет использовать, было наибольшим? (Требуется указать все такие списки.)

10. У Маши есть детали шести видов для ожерелья: красные, синие и зелёные шарики и красные, синие и зелёные пары шариков, соединенных вместе. Сколько разных ожерелий с 10 шариками Маша может составить из этих деталей так, чтобы выполнялись следующие два условия:
(i) детали, стоящие рядом, должны быть разного цвета;
(ii) если деталь – отдельный шарик, соседние с ней детали должны отличаться друг от друга по цвету?
Ожерелья считаются одинаковыми, если одно можно перевести в другое поворотом.

6. Среди k последовательных натуральных чисел нашлись 13 попарно взаимно простых. Найдите наименьшее возможное значение k.

7. При каких n выпуклый n-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы из каждой вершины исходило чётное число диагоналей?

8. Бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$ такова, что каждое натуральное число в ней встречается ровно один раз. Обязательно ли найдётся такое натуральное n, что среди чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n встречаются все натуральные числа от 1 до n?

9. В Президентском Физико-Математическом Узилище есть 2020 камер, занумерованных числами от 1 до 2020, а также 2020 ключников, k-й из которых умеет менять состояние (т.е. открытые закрывать, а закрытые открывать) всех камер, номера которых делятся на k. В каждой камере сидит по одному узнику. Европейский суд по правам человека может потребовать от президента освободить любых узников по своему выбору. Освобождения каких узников должен потребовать ЕСПЧ, чтобы количество ключников, которых необходимо будет использовать, было наибольшим? (Требуется указать все такие списки.)

10. У Маши есть детали шести видов для ожерелья: красные, синие и зелёные шарики и красные, синие и зелёные пары шариков, соединенных вместе. Сколько разных ожерелий с 10 шариками Маша может составить из этих деталей так, чтобы выполнялись следующие два условия:
(i) детали, стоящие рядом, должны быть разного цвета;
(ii) если деталь – отдельный шарик, соседние с ней детали должны отличаться друг от друга по цвету?
Ожерелья считаются одинаковыми, если одно можно перевести в другое поворотом.