

3. Южный разнбой. 19 октября

1. Произведение $(1^2 + 1)(2^2 + 1) \dots (n^2 + 1)$ делится на квадрат простого числа p . Докажите, что $p < 2n$.

2. Последовательность (x_n) , удовлетворяющая при всех натуральных n условию

$$x_{n+2} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right),$$

периодична. Какой может быть длина её наименьшего периода? (Укажите все возможные значения.)

3. В ряд выписаны 2020 чисел, каждое из которых равно 1 или -1 . Для любого числа в ряду можно найти начинающийся с этого числа или заканчивающийся этим числом отрезок из нескольких последовательных чисел (может быть, одного), сумма которых неположительна. Какую наибольшую сумму могут иметь все числа?

4. На полке стоят $n > 1$ книг, каждые две из которых имеют разную толщину и высоту. Книги расставлены в порядке возрастания высоты. Вася может поменять местами любые две стоящие рядом книги, если левая из них толще и ниже, чем правая. Докажите, что вне зависимости от порядка Васиных действий через конечное число шагов Вася будет вынужден прекратить свою деятельность, и книги будут стоять в порядке возрастания толщины.

5. Дано натуральное число a . Последовательность (e_n) определена условиями $e_0 = 1$ и $e_n = a + e_0 e_1 \dots e_{n-1}$ при $n \geq 1$. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, являющихся делителями членов последовательности.

3. Южный разнбой. 19 октября

1. Произведение $(1^2 + 1)(2^2 + 1) \dots (n^2 + 1)$ делится на квадрат простого числа p . Докажите, что $p < 2n$.

2. Последовательность (x_n) , удовлетворяющая при всех натуральных n условию

$$x_{n+2} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right),$$

периодична. Какой может быть длина её наименьшего периода? (Укажите все возможные значения.)

3. В ряд выписаны 2020 чисел, каждое из которых равно 1 или -1 . Для любого числа в ряду можно найти начинающийся с этого числа или заканчивающийся этим числом отрезок из нескольких последовательных чисел (может быть, одного), сумма которых неположительна. Какую наибольшую сумму могут иметь все числа?

4. На полке стоят $n > 1$ книг, каждые две из которых имеют разную толщину и высоту. Книги расставлены в порядке возрастания высоты. Вася может поменять местами любые две стоящие рядом книги, если левая из них толще и ниже, чем правая. Докажите, что вне зависимости от порядка Васиных действий через конечное число шагов Вася будет вынужден прекратить свою деятельность, и книги будут стоять в порядке возрастания толщины.

5. Дано натуральное число a . Последовательность (e_n) определена условиями $e_0 = 1$ и $e_n = a + e_0 e_1 \dots e_{n-1}$ при $n \geq 1$. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, являющихся делителями членов последовательности.