4. Заключительный [на сегодня] разнобой. 19 октября

1. Квадрат разбит на несколько прямоугольников так, что любая горизонтальная прямая пересекает ровно $n > 1$ прямоугольников, а любая вертикальная прямая — ровно $m > 1$ прямоугольников (рассматриваются только прямые, не содержащие сторон прямоугольников). Каково минимально возможное число прямоугольников разбиения?

2. $p > 2$ – простое число. Иван посчитал все остатки от деления чисел $1!, 2!, \ldots, (p-1)!$ на p. Докажите, что он получил больше, чем $\sqrt{p}$ различных остатков.

3. 13 четырехэлементных подмножеств множества M обладают следующим свойством: для любых двух элементов M ровно одно из 13 подмножеств содержит оба эти элемента. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать так, чтобы каждый элемент M входил не более, чем в три из них?

4. Пусть G — граф с e ребрами. Докажите, что в G можно выбрать хотя бы $\frac{e}{2}$ ребер которые образуют двудольный подграф.

5. В вершинах выпуклого 2018-угольника стоят нули и единицы. Докажите, что этот многоугольник можно триангулировать так, чтобы суммы чисел в вершинах любых двух треугольников отличались не более, чем на 1.

«Сириус», октябрьская математическая программа – 2020, группа 10А

4. Заключительный [на сегодня] разнобой. 19 октября

1. Квадрат разбит на несколько прямоугольников так, что любая горизонтальная прямая пересекает ровно $n > 1$ прямоугольников, а любая вертикальная прямая — ровно $m > 1$ прямоугольников (рассматриваются только прямые, не содержащие сторон прямоугольников). Каково минимально возможное число прямоугольников разбиения?

2. $p > 2$ – простое число. Иван посчитал все остатки от деления чисел $1!, 2!, \ldots, (p-1)!$ на p. Докажите, что он получил больше, чем $\sqrt{p}$ различных остатков.

3. 13 четырехэлементных подмножеств множества M обладают следующим свойством: для любых двух элементов M ровно одно из 13 подмножеств содержит оба эти элемента. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать так, чтобы каждый элемент M входил не более, чем в три из них?

4. Пусть G — граф с e ребрами. Докажите, что в G можно выбрать хотя бы $\frac{e}{2}$ ребер которые образуют двудольный подграф.

5. В вершинах выпуклого 2018-угольника стоят нули и единицы. Докажите, что этот многоугольник можно триангулировать так, чтобы суммы чисел в вершинах любых двух треугольников отличались не более, чем на 1.