16. Системы линейный уравнений: теория. 27 октября

Определение. m, n — натуральные числа, a_{ij}, b_i — элементы некоторого множества K (в рамках этого листочка $K = \mathbb{R}$). *Системой m линейных уравнений от n переменных* x_1, x_2, …, x_n называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases};$$

a_{ij} — *коэффициент* при переменной x_j в i-ом уравнении, b_i — *свободный член*[1] i-го уравнения.

Определение. Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется *однородной*, иначе — *неоднородной*.

Определение. *Решением* системы линейных уравнений называется упорядоченный набор из n элементов K $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$, $\ell_i \in K$, такой, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, при подстановке в i-ое уравнение ℓ_j вместо x_j получается верное числовое равенство.

Определение. Обозначим X множество всех решений системы линейных уравнений. Если $X = \varnothing$ (т.е. система линейных уравнений не имеет решений), то система называется *несовместной*. Если $X \neq \varnothing$ (т.е. система имеет решение), то система называется *совместной*. Если $|X| = 1$, то система называется *определенной*. Если $|X| > 1$, то система называется *неопределенной*.

0_1. Почему однородная система линейных уравнений всегда совместная?

Определение. Две системы линейных уравнений *от одного* набора x_1, x_2, …, x_n неизвестных называются *эквивалентными*, если множество их решений $X_{\mathbf{I}}$ и $X_{\mathbf{II}}$ совпадают.

0_2. Почему две несовместные системы линейных уравнение от одного набора переменных эквивалентны?

Определение. Следующие преобразования системы линейных уравнений будем называть *элементарными*:
1. при $i \neq j$ к i-ому уравнению системы прибавить j-ое, умноженное на некоторое число $c \in K$;
2. при $i \neq j$ поменять i-ое и j-ое уравнения местами;
3. i-ое уравнение умножить на $c \neq 0$.

1. a) Докажите, что если от системы (**I**) можно перейти к системе (**II**) при помощи конечного числа элементарных преобразований, то и от системы (**II**) можно перейти к системе (**I**) при помощи конечного числа элементарных преобразований.
b) Докажите, что если от системы (**I**) можно перейти к системе (**II**) при помощи конечного числа элементарных преобразований, то системы (**I**) и (**II**) эквивалентны.

Определение. Уравнение вида $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, где $b \neq 0$ будем называть *экзотическими*, а где $b = 0$ — *нулевым*. Уравнение, где хотя бы один из коэффициентов перед x_i не равен нулю будем называть *ненулевым*. *Ведущим коэффициицентом* ненулевого уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ будем называть первый ненулевой коэффициент a_s.

Определение. Система линейных уравнений называется *ступенчатой*, если
1. в ней вначале идут ненулевые уравнения, потом не более одного экзотического, а потом нулевые;
2. номер ведущего элемента в ненулевом уравнении с бóльшим номером стоит строго правее, т.е. если a_{is} и a_{jt} — ведущие элементы в i-ом и j-ом уравнении соответственно и $i < j$, то $s < t$.

Определение. Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_r$ — номера ведущих коэффициентов ненулевых уравнений ступенчатой системы линейных уравнений. Переменные x_{j_1}, x_{j_2}, …, x_{j_r} назовём *главными*, а остальные — *свободными*.

2 (метод Гаусса). a) Докажите, что всякую систему линейных уравнений конечным числом элементарных преобразований 1-ого и 2-ого типа можно привести к ступенчатому виду.
b) Как решать ступенчатую систему линейных уравнений?

3. Докажите, что если $K = \mathbb{Z}_p$, где p — простое, то количество главных и свободных переменных не зависит от способа приведения системы к ступенчатому виду.

4. Докажите, что всякая однородная система линейных уравнений, число уравнений которой меньше числа переменных, имеет ненулевое решение.

5. Докажите, что если система совместна и имеет только рациональные решения, то она определена.

6. Докажите, что если однородная система имеет ненулевое рациональное решение, то она имеет ненулевое целочисленное решение.

7 (почти альтернатива Фредгольма). a) Пусть $m = n$ (т.е. уравнений столько же, сколько переменных). Докажите, что тогда либо система линейных уравнений определена, либо соответствующая ей однородная система (т.е. однородная система с теми же коэффициентами) имеет ненулевое решение.
b) Выведите из пункта a) существование и единственность интерполяционного многочлена.

[1] я обычно называю *правая часть*