17. Спуск. 27 октября

1. Пусть A_1 — основание перпендикуляра из вершины некоторого остроугольного треугольника на сторону 1. Пусть A_2 — основание перпендикуляра из точки A_1 на сторону 2, A_3 — из точки A_2 на сторону 3, A_4 — из точки A_3 на сторону 1, и так далее. Докажите, что все точки A_i различны.

2. Найдите все простые числа p для которых существуют натуральные числа n, x и y такие, что $p^n = x^3 + y^3$.

3. В стаде 101 корова. Если увести любую одну корову, то оставшихся можно разделить на две части по 50 коров в каждой так, что суммарный вес коров первой части будет равен суммарному весу коров другой части. Докажите, что все коровы весят одинаково.

4. На доске выписано 100 целых чисел. Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.

5. Дан лист клетчатой бумаги. Докажите, что при $n \neq 4$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах решетки. *Случаи $n = 3$ и $n = 6$ кажется немного отличаются.*

6. Можно ли разрезать куб на несколько различных кубов?

7. Дан выпуклый многогранник и точка внутри него. Докажите, что хотя бы один нз перпендикуляров к плоскостям граней, проведенных через эту точку, пересекается с соответствующей гранью.

«Сириус», октябрьская математическая программа – 2020, группа 10А

17. Спуск. 27 октября

1. Пусть A_1 — основание перпендикуляра из вершины некоторого остроугольного треугольника на сторону 1. Пусть A_2 — основание перпендикуляра из точки A_1 на сторону 2, A_3 — из точки A_2 на сторону 3, A_4 — из точки A_3 на сторону 1, и так далее. Докажите, что все точки A_i различны.

2. Найдите все простые числа p для которых существуют натуральные числа n, x и y такие, что $p^n = x^3 + y^3$.

3. В стаде 101 корова. Если увести любую одну корову, то оставшихся можно разделить на две части по 50 коров в каждой так, что суммарный вес коров первой части будет равен суммарному весу коров другой части. Докажите, что все коровы весят одинаково.

4. На доске выписано 100 целых чисел. Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.

5. Дан лист клетчатой бумаги. Докажите, что при $n \neq 4$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах решетки. *Случаи $n = 3$ и $n = 6$ кажется немного отличаются.*

6. Можно ли разрезать куб на несколько различных кубов?

7. Дан выпуклый многогранник и точка внутри него. Докажите, что хотя бы один нз перпендикуляров к плоскостям граней, проведенных через эту точку, пересекается с соответствующей гранью.