19. Системы линейный уравнений: задачи. 28 октября

1. В стаде 101 корова. Если увести любую одну корову, то оставшихся можно разделить на две части по 50 коров в каждой так, что суммарный вес коров первой части будет равен суммарному весу коров другой части. Докажите, что все коровы весят одинаково.

2. На доске выписано 100 чисел. Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.

3. По кругу стоят 99 чисел, не все нулевые. Докажите, что можно выкинуть два соседних числа так, что оставшиеся числа нельзя разбить на две равные по сумме группы.

4. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково. Веса бананов a) действительные; b) положительные; c) натуральные.

5. В некоторых вершинах связного графа (без петель и кратных ребер) записаны действительные числа. Докажите, что можно записать числа в оставшихся вершинах, так чтобы каждое из вновь написанных чисел было бы средним арифметическим своих соседей.

6. В n-элементном множестве выделены $n-1$ подмножеств. Докажите, что можно покрасить некоторые (хотя бы один) элементы в красный и синий цвета так, что в каждом выделенном подмножестве либо не будет окрашенных элементов, либо будут присутствовать элементы обоих цветов.

7. На отрезке $[0,1]$ отмечены концы, а также конечное число различных точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

8. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое положительное количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участником баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определить сложность вопросов, чтобы места между участниками распределились любым наперед заданным образом. При каком наибольшем числе участников это могло быть?

9. Докажите, что если прямоугольник можно разрезать на несколько квадратов, то отношение его сторон рационально.

10. Рёбра полного граф на n вершинах представлены как объединение m непересекающихся полных двудольных графов. Докажите, что $m \geqslant n-1$.