20. Катастрофы. 30 октября

Пример. На плоскости проведено $n \geqslant 3$ прямых общего положения. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

1. Имеется выпуклый 1000-угольник, внутри которого отмечена точка P, не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что количество треугольников с вершинами в вершинах 1000-угольника, внутри которых оказалась точка P, чётно.

2. На плоскости проведено $n \geqslant 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета.

3. На плоскости отмечено $n \geqslant 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Обозначим через c_k количество выпуклых k-угольников с вершинами в отмеченных точках, внутри которых нет других отмеченных точек. Докажите, что выражение $\sum_{k=3}^{n}(-1)^k c_k$ зависит только от n (т.е. не зависит от положения исходных точек).

4. На плоскости отмечены $2n+1$ точек, никакие четыре из которых не лежат на одной окружности и никакие три — на одной прямой. Окружность называется *уполовинивающей*, если она проходит через три отмеченных точки и внутри неё лежит ровно $n-1$ отмеченная точка. Каким может быть количество уполовинивающих окружностей?

5. a) На плоскости проведены n прямых общего положения. Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не менее $n-2$ треугольников.

b) Расположите на плоскости n прямых общего положения так, чтобы среди частей, на которые они делят плоскость, было ровно $n-2$ треугольника.

«Сириус», октябрьская математическая программа – 2020, группа 10А

20. Катастрофы. 30 октября

Пример. На плоскости проведено $n \geqslant 3$ прямых общего положения. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

1. Имеется выпуклый 1000-угольник, внутри которого отмечена точка P, не лежащая ни на одной из диагоналей. Докажите, что количество треугольников с вершинами в вершинах 1000-угольника, внутри которых оказалась точка P, чётно.

2. На плоскости проведено $n \geqslant 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета.

3. На плоскости отмечено $n \geqslant 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Обозначим через c_k количество выпуклых k-угольников с вершинами в отмеченных точках, внутри которых нет других отмеченных точек. Докажите, что выражение $\sum_{k=3}^{n}(-1)^k c_k$ зависит только от n (т.е. не зависит от положения исходных точек).

4. На плоскости отмечены $2n+1$ точек, никакие четыре из которых не лежат на одной окружности и никакие три — на одной прямой. Окружность называется *уполовинивающей*, если она проходит через три отмеченных точки и внутри неё лежит ровно $n-1$ отмеченная точка. Каким может быть количество уполовинивающих окружностей?

5. a) На плоскости проведены n прямых общего положения. Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не менее $n-2$ треугольников.

b) Расположите на плоскости n прямых общего положения так, чтобы среди частей, на которые они делят плоскость, было ровно $n-2$ треугольника.