

25. Варьирование. 3 ноября

1. Про 100 чисел x_1, x_2, \dots, x_{100} известно, что $x_1 = 1$, а для всех $k \geq 2$ выполнено $0 \leq x_k \leq 2x_{k-1}$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{99} - x_{100}$?

2. В выпуклом пятиугольнике каждая диагональ отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей этих треугольников больше площади пятиугольника.

3. Для положительных a, b, c, A, B, C, k , удовлетворяющих равенству $a + A = b + B = c + C = k$, докажите, что

$$aB + bC + cA \leq k^2.$$

4. Докажите, что периметр любого сечения треугольной пирамиды плоскостью не превосходит наибольшего из периметров её граней.

5. У безумного архитектора имеются в наличии 100 кирпичей. Он хочет выстроить из них 100-уровневую башню с максимально возможной длиной проекции на поверхность земли. Чему будет равна длина этой проекции, если каждый уровень башни состоит ровно из одного расположенного горизонтально кирпича?

6. Пусть M — выпуклый многоугольник, содержащийся в единичном квадрате, а S и P — его площадь и периметр соответственно. Докажите, что

$$S \geq \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \cdot (P - 2\sqrt{2}).$$

7. Даны неотрицательные числа $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ и действительные числа $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \min\{a_i, a_j\} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i d_j \min\{b_i, b_j\} \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i d_j \min\{a_i, b_j\}$$

25. Варьирование. 3 ноября

1. Про 100 чисел x_1, x_2, \dots, x_{100} известно, что $x_1 = 1$, а для всех $k \geq 2$ выполнено $0 \leq x_k \leq 2x_{k-1}$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{99} - x_{100}$?

2. В выпуклом пятиугольнике каждая диагональ отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей этих треугольников больше площади пятиугольника.

3. Для положительных a, b, c, A, B, C, k , удовлетворяющих равенству $a + A = b + B = c + C = k$, докажите, что

$$aB + bC + cA \leq k^2.$$

4. Докажите, что периметр любого сечения треугольной пирамиды плоскостью не превосходит наибольшего из периметров её граней.

5. У безумного архитектора имеются в наличии 100 кирпичей. Он хочет выстроить из них 100-уровневую башню с максимально возможной длиной проекции на поверхность земли. Чему будет равна длина этой проекции, если каждый уровень башни состоит ровно из одного расположенного горизонтально кирпича?

6. Пусть M — выпуклый многоугольник, содержащийся в единичном квадрате, а S и P — его площадь и периметр соответственно. Докажите, что

$$S \geq \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \cdot (P - 2\sqrt{2}).$$

7. Даны неотрицательные числа $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ и действительные числа $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \min\{a_i, a_j\} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i d_j \min\{b_i, b_j\} \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i d_j \min\{a_i, b_j\}$$