27. Список вопросов и избранных задач к теоретическому зачёту. 28 октября

1. Сумма по Минковскому: определение, связь с диаметром, шириной, выпуклостью, выпуклой оболочкой, центральной симметрией.

2. Сумма многоугольников: задачи **6.4**, **6.6.**, **6.7.**

3. Неравенство Брунна–Минковского.

4. Площадь и периметр выпуклого многоугольника фигуры, диаметр которой равен 2.

5. Линейные функции на плоскости: два определения, их равносильность, множество нулей линейной функции, примеры линейных функций, задача **19.2.**.

6. [Почти] альтернатива Фредгольма.

7. Транснеравенство: доказательство с помощью линейного варьирования.

8. Задача про 101 корову: решение через систему линейный уравнений.

9. Задача про 101 корову: решение через линейную зависимость.

10. Задача про 101 корову: решение через теорему Дирихле.

9.6. G — двудольный граф, k — некоторое число. Для раскраски ρ в k цветов обозначим $n_i(v_j)$ количество рёбер цвета i в вершине v_j. Докажите, что существует раскраска для которой $|n_i(v_s) - n_j(v_s)| \leqslant 1$ для любых i, j, s.

12.4. В N-элементном множестве выделены 100 подмножеств. Все они четны (т. е. состоят из четного числа элементов), их всевозможные пересечения по 2, по 3, …, по 99 тоже четны, а пересечение всех 100 подмножеств нечетно. При каком наименьшем N такое возможно?

12.6. Дана неизвестная нам последовательность действительных чисел a_1, a_2, …, a_{1000}. Есть два доступных действия:
1) Спросить чему равно a_i.
2) Выбрать произвольную подпоследовательность a_{k_1}, a_{k_2}, …, a_{k_l} и получить в ответ весь набор из $\frac{l(l-1)}{2}$ попарных расстояний между этими числами.
Как восстановить последовательность за 35 вопросов?

15.7. Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставлена в соответствие наибольшая из площадей треугольников, содержащихся в P, одна из сторон которых совпадает с b. Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам, не меньше удвоенной площади P.

18.5. В некоторых вершинах связного графа (без петель и кратных ребер) записаны действительные числа. Докажите, что можно записать числа в оставшихся вершинах, так чтобы каждое из вновь написанных чисел было бы средним арифметическим своих соседей.

18.8. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое положительное количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участником баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определить сложность вопросов, чтобы места между участниками распределились любым наперед заданным образом. При каком наибольшем числе участников это могло быть?

18.10. Рёбра полного граф на n вершинах представлены как объединение m непересекающихся полных двудольных графов. Докажите, что $m \geqslant n - 1$.

20.5. На плоскости проведены n прямых общего положения. Какое наименьшее количество треугольников при этом могло образоваться?

21.4. Дан треугольник ABC. На прямой AC выбраны точки M и N такие, что $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{MN}$. X — основание перпендикуляра из M на BC, Y — основание перпендикуляра из N на AB, H — ортоцентр ABC. Докажите, что B, X, Y и H лежат на одной окружности.

21.7. Точки $ABCD$ лежат на одной окружности. Для любого разбиения этих четырех точек на пары опустим из фиксированной точки P перпендикуляры на две прямые, соединяющие точки, находящиеся в одной паре. После отметим середину отрезка между их основаниями. Докажите, что три полученные точки лежат на одной прямой.

22.5. Магазин получил несколько заказов, каждый заказ состоит из попарно различных товаров. Удивительно, но в магазине не осталось ни одной монеты номиналом меньше 1 рубля. Поэтому руководство приняло решение округлить цену каждого товара вверх или вниз так, чтобы цена каждого товара стала целой. Докажите, что если каждый товар заказали не более n раз, то можно округлить цены так, чтобы стоимость каждого заказа изменилась не более чем на n рублей.

23.1. Имеется табло с несколькими лампочками, а также несколько переключателей, каждый из которых меняет на противоположное состяние нескольких лампочек. Докажите, что количество различных состояний лампочек, которые можно добиться, равняется степни двойки.

25.5. У безумного архитектора имеются в наличии 100 кирпичей. Он хочет выстроить из них 100-уровневую башню с максимально возможной длиной проекции на поверхность земли. Чему будет равна длина этой проекции, если каждый уровень башни состоит ровно из одного расположенного горизонтально кирпича?

25.6. Пусть M — выпуклый многоугольник, содержащийся в единичном квадрате, а S и P — его площадь и периметр соответственно. Докажите, что

$$S \geqslant \frac{2+\sqrt{2}}{4} \cdot (P - 2\sqrt{2}).$$