8-1. Условные равенства. 9 января
Часть 1. С олимпиады Эйлера

1. Сумма четырех целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырех произведений, умноженная на -1, равна удвоенному квадрату целого числа.

2. На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.

3. Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин? Найдите все возможности.

4. Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу?

5. Целые числа a, b, c таковы, что $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=2n+1$. Докажите, что $a^3+b^2-a^2-b^3$, например, делится на n.

«Сириус», январская математическая программа – 2021, 8 класс

8-1. Условные равенства. 9 января
Часть 1. С олимпиады Эйлера

1. Сумма четырех целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырех произведений, умноженная на -1, равна удвоенному квадрату целого числа.

2. На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.

3. Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин? Найдите все возможности.

4. Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу?

5. Целые числа a, b, c таковы, что $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=2n+1$. Докажите, что $a^3+b^2-a^2-b^3$, например, делится на n.

Часть 2. Не с олимпиады Эйлера

6. Числа a, b, c и d таковы, что $a+b=c+d$ и $a^2+b^2=c^2+d^2$. Докажите, что тогда и а) $a^3+b^3=c^3+d^3$; b) $\sqrt[1001]{a}+\sqrt[1001]{b}=\sqrt[1001]{c}+\sqrt[1001]{d}$.

7. Докажите, что если $a+b+c=0$, то

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

8. Про числа x, y, z известно, что $xyz=1$. Чему равно

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}?$$

9. Докажите, что если $a+b=1$, то $\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

10. Докажите, что если

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x},$$

то $x=y=z$ или $x^2y^2z^2=1$.

Часть 2. Не с олимпиады Эйлера

6. Числа a, b, c и d таковы, что $a+b=c+d$ и $a^2+b^2=c^2+d^2$. Докажите, что тогда и а) $a^3+b^3=c^3+d^3$; b) $\sqrt[1001]{a}+\sqrt[1001]{b}=\sqrt[1001]{c}+\sqrt[1001]{d}$.

7. Докажите, что если $a+b+c=0$, то

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

8. Про числа x, y, z известно, что $xyz=1$. Чему равно

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}?$$

9. Докажите, что если $a+b=1$, то $\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

10. Докажите, что если

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x},$$

то $x=y=z$ или $x^2y^2z^2=1$.