

8-1. Скобки. 10 января

1. Раскройте скобки и приведите подобные:

- a) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$;
 б) $(a + b + c)(ab + bc + ca)$ и $(a + b)(b + c)(c + a)$;
 в) $(a + b + c)^2$ и $(a + b + c)^3$;
 г) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$;
 д) $(1 + a)(1 + b)(1 + c)$ и $(1 - a)(1 - b)(1 - c)$.

2. а) Как может получиться x^7 при раскрытии скобок в выражении

$$(x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 8x^2 - x + 9)(4x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 5x + 7)?$$

Найдите коэффициент¹ при x^7 в этом выражении.

б) Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях

$$(a - 1)(a^{19} + a^{18} + a^{17} + \dots + a + 1) \text{ и } (a + 1)(a^{19} - a^{18} + a^{17} - \dots + a - 1).$$

в) Как может получиться $a_1 a_2$ при раскрытии скобок в выражении

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)?$$

Раскройте скобки в этом выражении.

3. а) Чему равняется сумма всех чисел в таблице умножения?

б) Каждую нечётную цифру умножим на каждую чётную. Чему равняется сумма всех полученных чисел?

в) 3D-таблица умножения устроена как обычная таблица умножения: в клетках куба $9 \times 9 \times 9$ стоят произведения трёх цифр. Чему равна сумма всех чисел в этой таблице?

4. а) Как может получиться abc при раскрытии скобок $(a + b)(b + c)(c + a)$? Какой коэффициент будет при abc ?

б) Как может получиться $a^3 b^2$ при раскрытии скобок $(a + b)^5$?² Найдите коэффициент при $a^3 b^2$ в этом выражении.

в) Как может получиться abc при раскрытии скобок $(a + b + c)^3$? Найдите коэффициент при abc .

5. Для каждого набора цифр напомним произведение цифр в этом наборе. (Произведение одного числа — само это число.) Чему равняется сумма всех полученных чисел? *Подсказка: задача 1е).*

б) А сумма в тех наборах где нечётное количество цифр?

¹после раскрытия скобок и приведения подобных

²т.е. скобок $(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$

8-1. Скобки. 10 января

1. Раскройте скобки и приведите подобные:

- a) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$;
 б) $(a + b + c)(ab + bc + ca)$ и $(a + b)(b + c)(c + a)$;
 в) $(a + b + c)^2$ и $(a + b + c)^3$;
 г) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$;
 д) $(1 + a)(1 + b)(1 + c)$ и $(1 - a)(1 - b)(1 - c)$.

2. а) Как может получиться x^7 при раскрытии скобок в выражении

$$(x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 8x^2 - x + 9)(4x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 5x + 7)?$$

Найдите коэффициент¹ при x^7 в этом выражении.

б) Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях

$$(a - 1)(a^{19} + a^{18} + a^{17} + \dots + a + 1) \text{ и } (a + 1)(a^{19} - a^{18} + a^{17} - \dots + a - 1).$$

в) Как может получиться $a_1 a_2$ при раскрытии скобок в выражении

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)?$$

Раскройте скобки в этом выражении.

3. а) Чему равняется сумма всех чисел в таблице умножения?

б) Каждую нечётную цифру умножим на каждую чётную. Чему равняется сумма всех полученных чисел?

в) 3D-таблица умножения устроена как обычная таблица умножения: в клетках куба $9 \times 9 \times 9$ стоят произведения трёх цифр. Чему равна сумма всех чисел в этой таблице?

4. а) Как может получиться abc при раскрытии скобок $(a + b)(b + c)(c + a)$? Какой коэффициент будет при abc ?

б) Как может получиться $a^3 b^2$ при раскрытии скобок $(a + b)^5$?² Найдите коэффициент при $a^3 b^2$ в этом выражении.

в) Как может получиться abc при раскрытии скобок $(a + b + c)^3$? Найдите коэффициент при abc .

5. Для каждого набора цифр напомним произведение цифр в этом наборе. (Произведение одного числа — само это число.) Чему равняется сумма всех полученных чисел? *Подсказка: задача 1е).*

б) А сумма в тех наборах где нечётное количество цифр?

¹после раскрытия скобок и приведения подобных

²т.е. скобок $(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$

6. На доске записаны 10 различных чисел. Профессор Odd вычислил все-возможные произведения нескольких записанных чисел, взятых в нечетном количестве (по 1, по 3, по 5, по 7, по 9), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на листок. Аналогично профессор Even вычислил все возможные произведения нескольких чисел, записанных на доске, взятых в четном количестве (по 2, по 4, по 6, по 8, по 10), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на свой листок. Оказалось, что сумма на листке профессора Odd на 1 больше, чем сумма на листке профессора Even. Докажите, что одно из чисел, выписанных на доске, равно 1.

7. Для каждого натурального $n \geq 2$ вычислите сумму

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

(В знаменателях стоят все возможные произведения нескольких из чисел $1, 2, \dots, n$. Произведение одного числа равно самому этому числу.)

8. Имеется n натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Выпишем все числа, обратные к каждому из чисел, к каждому произведению двух чисел, к каждому произведению трёх чисел, \dots , к произведению всех чисел. При каких натуральных n сумма всех выписанных чисел может оказаться равна 1?

6. На доске записаны 10 различных чисел. Профессор Odd вычислил все-возможные произведения нескольких записанных чисел, взятых в нечетном количестве (по 1, по 3, по 5, по 7, по 9), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на листок. Аналогично профессор Even вычислил все возможные произведения нескольких чисел, записанных на доске, взятых в четном количестве (по 2, по 4, по 6, по 8, по 10), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на свой листок. Оказалось, что сумма на листке профессора Odd на 1 больше, чем сумма на листке профессора Even. Докажите, что одно из чисел, выписанных на доске, равно 1.

7. Для каждого натурального $n \geq 2$ вычислите сумму

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

(В знаменателях стоят все возможные произведения нескольких из чисел $1, 2, \dots, n$. Произведение одного числа равно самому этому числу.)

8. Имеется n натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Выпишем все числа, обратные к каждому из чисел, к каждому произведению двух чисел, к каждому произведению трёх чисел, \dots , к произведению всех чисел. При каких натуральных n сумма всех выписанных чисел может оказаться равна 1?