8-1. Большие выражения. 11 января

1. Каждое из n чисел равно 1 или -1. Известно, что сумма их попарных произведений равна 0. Докажите, что n — точный квадрат.

2. Несколько деревень соединены дорогами с городом, между деревнями дорог нет. Грузовик отправляется из города с грузами сразу для всех деревень. Стоимость каждой поездки равна произведению веса всех грузов в кузове на расстояние. Докажите, что если вес каждого груза численно равен расстоянию от города до пункта назначения, то общая стоимость перевозки не зависит от порядка, в котором объезжаются пункты.

3. В турнире по волейболу n команд сыграли в один круг (каждая играла с каждой по одному разу, ничьих в волейболе не бывает). Пусть P — сумма квадратов чисел, задающих количество побед каждой команды, Q — сумма квадратов чисел, задающих количество их поражений. Докажите, что $P = Q$.

4. Натуральное число называется *совершенным*, если оно вдвое меньше суммы всех своих натуральных делителей: например, совершенным является число 6, так как $2 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 6$. Может ли сумма всех попарных произведений натуральных делителей совершенного числа n делиться на n^2?

5. Стороны и диагонали правильного 100-угольника покрасили — в красный цвет, если между его концами чётное число вершин, и в синий — если нечётное. В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на сторонах и диагоналях — произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

6. Среди 100 натуральных чисел ровно 33 нечётных. Раз в минуту к этим числам дописывается сумма всех попарных произведений всех уже имеющихся чисел (например, если были числа 1, 2, 3, 3, то следующим ходом было дописано число $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3$). Можно ли утверждать, что рано или поздно появится число, делящееся на $2^{10000000}$?

«Сириус», январская математическая программа – 2021, 8 класс

8-1. Большие выражения. 11 января

1. Каждое из n чисел равно 1 или -1. Известно, что сумма их попарных произведений равна 0. Докажите, что n — точный квадрат.

2. Несколько деревень соединены дорогами с городом, между деревнями дорог нет. Грузовик отправляется из города с грузами сразу для всех деревень. Стоимость каждой поездки равна произведению веса всех грузов в кузове на расстояние. Докажите, что если вес каждого груза численно равен расстоянию от города до пункта назначения, то общая стоимость перевозки не зависит от порядка, в котором объезжаются пункты.

3. В турнире по волейболу n команд сыграли в один круг (каждая играла с каждой по одному разу, ничьих в волейболе не бывает). Пусть P — сумма квадратов чисел, задающих количество побед каждой команды, Q — сумма квадратов чисел, задающих количество их поражений. Докажите, что $P = Q$.

4. Натуральное число называется *совершенным*, если оно вдвое меньше суммы всех своих натуральных делителей: например, совершенным является число 6, так как $2 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 6$. Может ли сумма всех попарных произведений натуральных делителей совершенного числа n делиться на n^2?

5. Стороны и диагонали правильного 100-угольника покрасили — в красный цвет, если между его концами чётное число вершин, и в синий — если нечётное. В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на сторонах и диагоналях — произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

6. Среди 100 натуральных чисел ровно 33 нечётных. Раз в минуту к этим числам дописывается сумма всех попарных произведений всех уже имеющихся чисел (например, если были числа 1, 2, 3, 3, то следующим ходом было дописано число $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3$). Можно ли утверждать, что рано или поздно появится число, делящееся на $2^{10000000}$?