8-1. НОД и НОК. 16 января

Обозначение. Как всегда, (a,b) обозначает наибольший общий делитель чисел a и b, а $[a,b]$ — их наименьшее общее кратное.

1. Пусть a и b — натуральные числа. Докажите, что $(a,b)=a$ тогда и только тогда, когда $b \,\vdots\, a$. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для НОК.

2. Докажите, что для любых двух натуральных чисел a и b выполняется неравенство $a(a,b)+b[a,b] \geqslant 2ab$.

3. Натуральные числа x, y, z таковы, что $\text{НОД}(x,y)=z$ и $\text{НОК}(y,z)= {}$ $= x$. Докажите, что $x=y=z$.

4. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что $\text{НОК}(a,b,c)=a+b+c$. Докажите, что среди чисел a, b, c есть чётное число.

5. Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОК}(m,n)+\text{НОД}(m,n)= {}$ $= m+n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

6. Для натуральных чисел a и b выполняется неравенство

$$a\cdot\text{НОД}(a,b)+b\cdot\text{НОК}(a,b)<2{,}5ab.$$

Докажите, что a делится на b.

7. Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, n, где $n>5$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

8. Существуют ли такие попарно различные натуральные числа a, b и c, что $2a+\text{НОК}(b,c)=2b+\text{НОК}(a,c)=2c+\text{НОК}(a,b)$?

«Сириус», январская математическая программа – 2021, 8 класс

8-1. НОД и НОК. 16 января

Обозначение. Как всегда, (a,b) обозначает наибольший общий делитель чисел a и b, а $[a,b]$ — их наименьшее общее кратное.

1. Пусть a и b — натуральные числа. Докажите, что $(a,b)=a$ тогда и только тогда, когда $b \,\vdots\, a$. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для НОК.

2. Докажите, что для любых двух натуральных чисел a и b выполняется неравенство $a(a,b)+b[a,b] \geqslant 2ab$.

3. Натуральные числа x, y, z таковы, что $\text{НОД}(x,y)=z$ и $\text{НОК}(y,z)= {}$ $= x$. Докажите, что $x=y=z$.

4. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что $\text{НОК}(a,b,c)=a+b+c$. Докажите, что среди чисел a, b, c есть чётное число.

5. Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОК}(m,n)+\text{НОД}(m,n)= {}$ $= m+n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

6. Для натуральных чисел a и b выполняется неравенство

$$a\cdot\text{НОД}(a,b)+b\cdot\text{НОК}(a,b)<2{,}5ab.$$

Докажите, что a делится на b.

7. Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, n, где $n>5$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

8. Существуют ли такие попарно различные натуральные числа a, b и c, что $2a+\text{НОК}(b,c)=2b+\text{НОК}(a,c)=2c+\text{НОК}(a,b)$?