8-1. Разнобой по алгебре и теории чисел. 30 января

1. Петя загадал натуральное число N, Вася хочет его отгадать. Петя сообщает Васе сумму цифр числа $N+1$, затем сумму цифр числа $N+2$ и т. д. Докажите, что рано или поздно умный Вася сможет установить Петино число.

Напоминание. Для любого целого числа a и целого ненулевого числа b можно *поделить a на b с остатком*: т.е. найти такие целые q и r, что $a = bq + r$ и $0 \leqslant r < |b|$; r и называется *остатком*[1].

2. По кругу расставлены 100 натуральных чисел. Каждое из них разделили с остатком на следующее по часовой стрелке. Могло ли получиться 100 одинаковых ненулевых остатков?

3. По кругу написаны 2015 положительных чисел. Сумма любых двух рядом стоящих чисел больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1.

4. Некоторое натуральное число a разделили с остатком на числа 1, 2, 3, …, 1000. Могло ли так случиться, что среди остатков ровно по 10 раз встретятся числа 0, 1, 2, 3, …, 99?

5. Делитель натурального числа называется *собственным*, если он меньше этого числа, но больше 1. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.

6. Дано 2014 попарно различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что ни одно из данных чисел не может быть равно произведению шести попарно различных простых чисел.

[1] при делении a на b; q называется *неполным частным*

«Сириус», январская математическая программа – 2021, 8 класс

8-1. Разнобой по алгебре и теории чисел. 30 января

1. Петя загадал натуральное число N, Вася хочет его отгадать. Петя сообщает Васе сумму цифр числа $N+1$, затем сумму цифр числа $N+2$ и т. д. Докажите, что рано или поздно умный Вася сможет установить Петино число.

Напоминание. Для любого целого числа a и целого ненулевого числа b можно *поделить a на b с остатком*: т.е. найти такие целые q и r, что $a = bq + r$ и $0 \leqslant r < |b|$; r и называется *остатком*[1].

2. По кругу расставлены 100 натуральных чисел. Каждое из них разделили с остатком на следующее по часовой стрелке. Могло ли получиться 100 одинаковых ненулевых остатков?

3. По кругу написаны 2015 положительных чисел. Сумма любых двух рядом стоящих чисел больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1.

4. Некоторое натуральное число a разделили с остатком на числа 1, 2, 3, …, 1000. Могло ли так случиться, что среди остатков ровно по 10 раз встретятся числа 0, 1, 2, 3, …, 99?

5. Делитель натурального числа называется *собственным*, если он меньше этого числа, но больше 1. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.

6. Дано 2014 попарно различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что ни одно из данных чисел не может быть равно произведению шести попарно различных простых чисел.

[1] при делении a на b; q называется *неполным частным*